Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

КЛАССИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТСКИЙ УЧЕБНИК

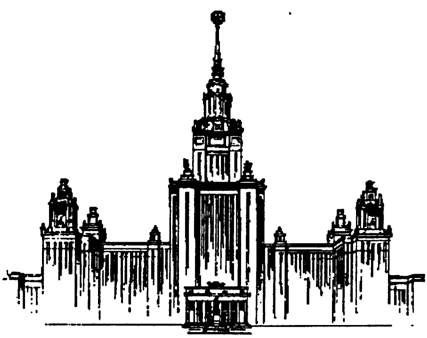
В.А. Бочаров, В.И. Маркин

ОСНОВЫ ЛОГИКИ

В. А. Бочаров, В. И. Маркин ОСНОВЫ ЛОГИКИ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
250 лет
имени М.В. Ломоносова

КЛАССИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТСКИЙ УЧЕБНИК



Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

В.А. БОЧАРОВ, В.И. МАРКИН

ОСНОВЫ ЛОГИКИ

Рекомендован советом по философии, политологии и религиоведению УМО по классическому университетскому образованию в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по гуманитарным и естественнонаучным специальностям

Москва
ИД «ФОРУМ» — ИНФРА-М
2008

УДК 16
ББК 87.4
Б 72

Рецензенты:
доктор философских наук, зав. кафедрой философии
и методологии науки философского факультета
МГУ им. М.В. Ломоносова, проф. *В.Г. Кузнецов*;
ведущий научный сотрудник Института философии РАН,
доктор философских наук, *В.Л. Васюков*

Бочаров В.А., Маркин В.И.
Б 72 Основы логики: Учебник. — М.: ИД «ФОРУМ» : ИНФРА-М. 2008. — 336 с. — (Классический университетский учебник).

ISBN 978-5-8199-0169-4 (ИД «ФОРУМ»)
ISBN 978-5-16-002293-2 (ИНФРА-М)

Этот учебник представляет собой основное содержание курса лекций по логике, который авторы в течение ряда лет читали на философском и психологическом факультетах Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Учебник предназначен для студентов гуманитарных и естественных факультетов университетов, а также для всех желающих изучать логику самостоятельно, или усовершенствоваться в ее знании.

УДК 16
ББК 87.4

ISBN 978-5-8199-0169-4 (ФОРУМ)
ISBN 978-5-16-002293-2 (ИНФРА-М)

Уважаемый читатель!

Вы открыли одну из замечательных книг, изданных в серии «Классический университетский учебник», посвященной 250-летию Московского университета. Серия включает свыше 150 учебников и учебных пособий, рекомендованных к изданию Учеными советами факультетов, редакционным советом серии и издаваемых к юбилею по решению Ученого совета МГУ.

Московский университет всегда славился своими профессорами и преподавателями, воспитавшими не одно поколение студентов, впоследствии внесших заметный вклад в развитие нашей страны, составивших гордость отечественной и мировой науки, культуры и образования.

Высокий уровень образования, которое дает Московский университет, в первую очередь обеспечивается высоким уровнем написанных выдающимися учеными и педагогами учебников и учебных пособий, в которых сочетаются как глубина, так и доступность излагаемого материала. В этих книгах аккумулируется бесценный опыт методики и методологии преподавания, который становится достоянием не только Московского университета, но и других университетов России и всего мира.

Издание серии «Классический университетский учебник» наглядно демонстрирует вклад, который вносит Московский университет в классическое университетское образование в нашей стране, и, несомненно, служит его развитию.

Решение этой благородной задачи было бы невозможным без активной помощи со стороны издательств, принявших участие в издании книг серии «Классический университетский учебник». Мы расцениваем это как поддержку ими позиции, которую занимает Московский университет в вопросах науки и образования. Это служит также свидетельством того, что 250-летний юбилей Московского университета — выдающееся событие в жизни всей нашей страны, мирового образовательного сообщества.

В. Садовничий

Ректор Московского университета
академик РАН, профессор *В.А. Садовничий*

Оглавление

ГЛАВА VI. ПОНЯТИЕ

ГЛАВА VII. ОПРЕДЕЛЕНИЕ

ГЛАВА VIII. ПРАВДОПОДОБНЫЕ РАССУЖДЕНИЯ

Посвящается 250–летию
Московского государственного
университета им. М. В. Ломоносова

ОТ АВТОРОВ

Учебник, четвертое издание которого предлагается вниманию читателей, представляет собой введение в проблематику современной логики и содержит изложение ее основных разделов. Знакомство с учебником позволит получить представление о предмете логики, природе и специфике логического знания, о наиболее известных логических теориях, а также о той методологической роли, которую играет логика в познавательной деятельности человека.

Авторы ставили своей целью не только представить логику как теоретическую дисциплину, но и очертить круг практических познавательных задач, которые могут быть решены с ее использованием. Особый акцент в учебнике делается на формулировке критериев, норм и правил корректного осуществления различных мыслительных процедур, таких как дедуктивное рассуждение, определение, классификация, формирование понятий и операции над ними, индукция, аналогия, выдвижение и проверка гипотез и т. д.

Описание и анализ перечисленных логических операций как раз и составляют основное содержание читаемых в высшей школе курсов логики. Однако в большинстве отечественных учебников по данной дисциплине формы и приемы познания рассматриваются традиционно, скорее, с позиций обычного здравого смысла, без должного учета тех результатов, которые были получены в современной логике, совершивших настоящую революцию в этой древнейшей области знания и сделавших логику подлинно теоретической наукой. Некоторые сведения о современной символической логике если иногда и содержатся в указанных учебниках, то играют, как правило, роль своеобразного «довеска» к обширному материалу, излагаемому в духе стандартных гимназических курсов. Знакомство с этими учебниками может создать превратное представление о существовании некоего барьера, разделяющего «старую» и «новую» логику, ведь современный логический аппарат не используется в них по существу для обсуждения и решения проблем, представленных в традиционной логике.

При написании учебника авторы стремились последовательно проводить линию на освещение всего комплекса логико-методологических проблем сквозь призму идей символической логики. Именно поэтому уже в первой главе нам показалось необходимым ввести наиболее фундаментальные понятия современной логики – понятия логической формы, логического закона, логического следования, формализованного языка, а затем на этой основе дать четкое представление о том, что представляют собой логические теории, как они строятся и какие задачи решают.

В последующих главах формулируется ряд логических теорий, составляющих каркас классической логики. Это классическая логика высказываний, классическая логика предикатов первого порядка и традиционная силлогистика (построение последней осуществляется в соответствии со стандартами, принятыми в современной логике). Именно с использованием аппарата этих теорий обсуждаются все логические вопросы как теоретического, так и прикладного характера.

Данный подход к изложению логической проблематики позволил не выделять в отдельные главы материал, посвященный логическому анализу естественного языка, суждениям (высказываниям) и аргументации. Указанные вопросы исследуются в рамках соответствующих логических теорий. Так, выделение семантических категорий языковых выражений проводится в главе III, посвященной логике предикатов, анализ сложных высказываний дается в главе II при построении логики высказываний, а анализ категорических высказываний – в главе V в рамках силлогистики. Различные виды прямых и непрямых способов аргументации представлены в главе II, моделирование дедуктивной аргументации осуществлено в главе IV, где формулируются натуральные исчисления высказываний и предикатов, а описание различных типов недедуктивной аргументации содержится в главе VIII, посвященной правдоподобным рассуждениям.

При изложении материала авторы старались не углубляться в разного рода теоретические тонкости, а выделили лишь тот теоретический минимум, который необходим для успешного решения практических задач. Поэтому в учебнике намеренно не затрагиваются проблемы метатеоретического характера, например вопрос о непротиворечивости и полноте логических теорий, отсутствуют их аксиоматические представления. Кроме того, здесь не представлены различные разделы неклассической логики, так как их изучение уместно в рамках более продвинутого курса.

При подготовке к публикации данного издания учебника внесен ряд серьезных изменений и уточнений в содержание предлагаемого материала и способ его изложения. Так, более строго сформулированы условия истинности и ложности формул в классической логике предикатов. Существенно пересмотрена классификация видов понятий, особенно по типу обобщаемых в понятии предметов, что позволило ей стать более стройной и прозрачной. Внесены изменения и в главу, посвященную определениям. Здесь также предложена более четкая их классификация. В главе VIII «Правдоподобные рассуждения» при изложении методов установления причинных зависимостей сформулированы условия элиминации предшествующих обстоятельств, что делает понятным отнесение этих методов к исключающей индукции. Отдельные изменения внесены и в другие главы учебника. Естественно, в данном издании исправлены те опечатки, которые имелись в предыдущих изданиях. Кроме того, с дидактической целью был по-новому отформатирован текст учебника: определения наиболее важных терминов, а также рассматриваемые примеры выделяются в особые абзацы с использованием шрифтов, отличающих их от основного текста.

Учебник ориентирован на круг читателей, для которых знакомство с логикой имеет не только общекультурное значение, но и для кого корректное использование строгих логических процедур является необходимым элементом их профессиональной деятельности. К этому кругу относятся будущие философы и психологи, а также студенты факультетов естественнонаучного профиля.

Авторы с чувством глубокой признательности не могут не вспомнить безвременно ушедшего из жизни руководителя Института логики, когнитологии и развития личности, заведующего сектором логики Института философии РАН, профессора В. А. Смирнова, который был инициатором написания учебника, своим постоянным вниманием и поддержкой стимулировал работу над ним. Мы выражаем также благодарность Е. В. Левенец, которая проделала огромную работу по подготовке первого издания учебника к публикации.

ГЛАВА I

ПРЕДМЕТ И ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ЛОГИКИ

§1. Логика как наука. Логика и язык. Основные формы и приемы рационального познания

Логика является одной из древнейших наук. Как стройная система знаний она сформировалась в IV веке до н. э. в трудах выдающегося древнегреческого мыслителя Аристотеля. Логические трактаты Аристотеля («Категории», «Об истолковании», Первая и Вторая «Аналитики», «Топика», «О софистических опровержениях») были объединены его последователями под общим названием «Органон», которое можно перевести как «орудие» («инструмент») познания.

В «Органоне» был заложен каркас логики как науки, сформулированы основные проблемы, решаемые в ней.

Прежде всего, это проблема построения *теории* правильных (*дедуктивных*) *рассуждений*, позволяющих из истинных высказываний гарантированно получать истинные следствия. Аристотелем была создана первая в истории дедуктивная система – *силлогистика*.

Второй круг проблем – их обычно называют *логико-семиотическими* – связан с применением языка как средства познания мира и средства выражения мысли. К их числу относятся проблемы выделения категорий языковых выражений в зависимости от типов их значений, а также установления смыслов и условий истинности и ложности высказываний различных видов.

К третьей, *логико-методологической* группе проблем относится выработка правил реализации таких познавательных процедур, как определение, классификация, объяснение, аналогия и др., а также способов организации систем знания, например научных теорий.

Чем же был вызван интерес к логической проблематике, и какие потребности общества и человека обусловили возникновение логики в столь раннюю эпоху развития цивилизации? Ведь перед человечеством в то время стояло множество более важных с практической точки зрения проблем, связанных с освоением окружающего мира и существованием человека в нем.

Эпоха античности характеризуется возникновением и интенсивным развитием наук – математики, физики, астрономии, медицины, психологии и др. Появилась потребность осмыслить, что представляет собой процесс познания и вообще умственная деятельность. При этом было понимание того, что сама познавательная деятельность не может стать успешной и эффективной без создания и осознанного применения ее инструментария. Поэтому-то и возникла необходимость ответить на вопросы, в каких формах действительность воспроизводится в мышлении, каковы условия получения истинного знания, как правильно осуществлять те или иные познавательные операции. Особенно остро подобные вопросы вставали в точных науках, например в геометрии. Здесь особую значимость приобретают требования строгости определений и убедительности доказательств.

Логика как наука возникла в недрах древнегреческой философии, для которой характерна глубина и высокая степень разработанности философской проблематики. При исследовании феномена человеческого познания (а это одна из основных задач философии) перед философами встал вопрос о критериях корректности мыслительных процедур, т. е. о том, какое мышление можно считать правильным. Кроме того, была осознана необходимость создания собственного философского «органона», место которого на долгое время как раз и заняла созданная Аристотелем логика.

Многие исследователи истории логики справедливо указывают, что непосредственно ее возникновение было связано с широким распространением в греческом обществе той эпохи интеллектуальных споров и дискуссий на весьма отвлеченные темы. В. Минто, например, отмечает, что логические сочинения Аристотеля «были назначены для усовершенствования его учеников в том специальном искусстве, в котором желал отличиться каждый молодой афинянин того времени, стремившийся к умственному превосходству... Действительно, эта логика была в своих различных частях рядом руководств для изучения модной тогда умственной игры, – особого вида прений, диалектики, игры в вопросы и ответы, столь полно иллюстрированной в диалогах Платона и связанной с именем Сократа» (*В. Минто*. Дедуктивная и индуктивная логика. М., 1896).

Роль логики в дискуссии, в процессе формирования убеждений очень велика. Она позволяет не только самому осуществлять подлинно доказательную аргументацию, избегая при этом логических ошибок, но и находить ошибки, уловки и всякого рода софизмы в аргументациях оппонентов, отличать рациональное обоснование от апелляций к чувствам, верованиям и стереотипам.

За время, прошедшее с момента своего возникновения, логика обогатилась новыми разделами, как, например, индуктивной логикой, основателями которой являются Ф. Бэкон и Дж. Милль; были построены многочисленные дедуктивные теории; для исследования логической проблематики разрабатывались новые методы. Подлинную революцию в логике совершило применение алгебраических методов, аксиоматического метода, метода формализованных языков, исчислений и формальных семантик. Однако предмет логического анализа в основном остался прежним.

Для ответа на вопрос, что является предметом логики, сформулируем определение этой науки.

***Логика* – это нормативная наука о формах и приемах интеллектуальной познавательной деятельности, осуществляемой с помощью языка.**

Чтобы был понятен смысл данного определения, необходимо разъяснить следующие вопросы. Что представляет собой процесс познания? Каковы его ступени и в чем специфика интеллектуальной познавательной деятельности? Что такое язык, и какова его роль в познании? В каких формах отражается действительность в мышлении? Каковы основные логические приемы познания? И, наконец, в чем состоит нормативный характер логики как науки?

***Познанием* называется процесс отражения действительности в человеческом мозге, целью которого является получение адекватных знаний о мире.**

В процессе познания можно выделить две ступени: чувственную и рациональную (интеллектуальную).

На *чувственной* ступени мир познается посредством анализаторов (органов чувств). Основные формы такого познания – ощущения, восприятия и представления – являются чувственными образами конкретных предметов реального мира, результатами их воздействия на наши органы чувств.

Рациональное познание обладает рядом характеристик, отличающих его от чувственного. Особенностями рационального познания являются его обобщенность (на данной ступени мы познаем общее у разнородных предметов, законы, которым они подчиняются), абстрактность (человеческое мышление не только отражает реальный мир, но и творит собственный мир – мир абстрактных объектов), активный и целенаправленный характер. Но главная отличительная особенность интеллектуального познания состоит в том, что его инструментом служит язык, поэтому рациональное познание называют также *вербальным* (т. е. словесным).

Язык **– это знаковая система, предназначенная для фиксации, переработки и передачи информации.**

Различают *естественные* и *искусственные* языки. Естественные языки возникли прежде всего как средство общения между людьми; их формирование и развитие представляют собой длительный исторический процесс и происходят в основном стихийно. Искусственные языки сознательно создаются человеком для решения определенных задач. К числу естественных относятся такие разговорные языки, как русский, английский, греческий и т. п. Примерами искусственных языков являются – язык шахматной нотации (он предназначен для компактной записи шахматных партий), язык химических формул (с его помощью выражаются атомное строение веществ и ход химических реакций), язык дифференциального и интегрального исчисления в математике и т. д.

Всякий язык состоит из знаков.

Знаком **называется материальный объект, который для некоторого интерпретатора (субъекта) выступает в качестве представителя какого-то другого предмета.**

Основная функция знака, как явствует из приведенного определения, состоит в том, что он *репрезентирует* (представляет) какой-то предмет для некоторого интерпретатора. Таким образом, ситуация употребления знака включает в себя три компоненты: 1) сам знак, 2) предмет, репрезентируемый знаком, 3) интерпретатора, использующего знак.

Языковыми знаками в естественных языках являются произнесенные вслух или написанные значимые слова и словосочетания, а в искусственных языках – значимые символы и их комбинации. Например, словосочетание «основатель логики» служит знаком Аристотеля, слово «старше» – знаком определенного возрастного отношения, символ «0-0» в шахматной нотации – знаком короткой рокировки, а символ «+» в языке арифметики – знаком операции сложения.

Репрезентируемые знаками предметы могут иметь различную природу. Термин «предмет» в логике употребляется предельно широко: «предметом» здесь называют все, о чем мы можем мыслить, что может стать объектом нашего рассмотрения, – конкретные материальные индивиды, абстрактные объекты, свойства, отношения, функции, множества, процессы, явления, события, ситуации и т. п.

В качестве *интерпретатора* может выступать любой пользователь языка – отдельное лицо, группа людей или человеческое сообщество в целом.

Важнейшими характеристиками знака являются его смысл и его значение.

Значением знака **(экстенсионалом) называется предмет, представляемый данным знаком.**

Смыслом знака **(интенсионалом) называют ту информацию о репрезентируемом предмете, которую содержит сам знак или которая связывается с этим знаком в процессе человеческого общения или познания.**

Так, значением знака «число, которое является простым и четным» выступает число 2, поскольку именно оно обозначается данным словосочетанием. Смысл же этого знака – та информация, которую он содержит о числе 2, а именно сложный признак числа «быть простым и быть четным».

Некоторые знаки репрезентируют предметы, отсутствующие в той предметной области, о которой говорится в языковых контекстах, где эти знаки содержатся. О таких знаках говорят, что они не имеют значения в данной предметной области, и называют их *пустыми* или *мнимыми* относительно данной предметной области. Например, словосочетание «гора, которая выше Эвереста» не имеет значения в множестве гор нашей планеты; знак «нынешний король Франции» не обозначает никого из людей, живущих в настоящее время; знак «наибольшее натуральное число» является *пустым* относительно универсума натуральных чисел.

Если же знак репрезентирует предметы, имеющиеся в соответствующей предметной области, то его называют *непустым*.

Некоторые знаки не несут сами по себе никакой информации о репрезентируемых предметах. О таких знаках говорят, что они лишены собственного смысла, и называют их *неописательными* знаками. Примерами неописательных знаков являются слова «Луна», «Москва», «Аристотель»; они лишь называют репрезентируемые предметы, но никак не характеризуют их.

Смысл подобным терминам может придаваться внешним образом, например посредством явного определения, когда данным знакам сопоставляются *описательные* (т. е. имеющие собственный смысл) термины: скажем, словосочетания «небесное тело, вызывающая на Земле явления прилива и отлива», «главный административный центр государства Россия», «древнегреческий философ, учитель Александра Македонского».

Язык как знаковая система может исследоваться в различных аспектах, с разных точек зрения. Выделяют три основных аспекта изучения языка: синтаксический, семантический и прагматический.

При *синтаксическом* подходе исследуются отношения между самими знаками, при этом отвлекаются от того, кто использует эти знаки и какие предметы они репрезентируют. Задачами синтаксического анализа языка являются, например, выделение простейших, элементарных знаков, правил образования сложных знаков и процедур перехода от одних совокупностей знаков к другим.

Семантический аспект предполагает исследование отношений между знаками и репрезентируемыми ими предметами. При этом решается, в частности, задача выделения различных категорий языковых знаков в зависимости от типов их значений, а также от типов выражаемых этими знаками смыслов.

Прагматический анализ языка состоит в исследовании отношений между знаками и интерпретаторами, использующими эти знаки. Важнейшая задача, решаемая при данном подходе, – установление зависимости значения и смысла знака от тех или иных особенностей интерпретатора и, более широко, от особенностей внеязыкового контекста, сопутствующего употреблению данного знака.

Очевидно, что если объектом нашего исследования становится некоторый язык, то оно (исследование) должно вестись также с использованием каких-то языковых средств, т. е. в рамках какого-то языка. Поэтому в подобной ситуации существенным оказывается различение *объектного языка* и *метаязыка*.

Объектным языком **называют тот язык, который является предметом исследования, а** ***метаязыком*** **– тот язык, с помощью которого изучается объектный язык.**

Например, в ситуации, когда тренер объясняет начинающему шахматисту правила записи шахматных партий, в качестве объектного языка выступает язык шахматной нотации, а в качестве метаязыка – разговорный язык, на котором ведется обучение.

Язык при использовании его в практической деятельности человека выполняет множество различных функций. Он служит; например, средством общения между людьми, весьма часто играет роль своеобразного хранилища информации для следующих поколений. В языке выражается внутренний мир человека, передаются его чувства, переживания, эмоции. Но главной для логики является познавательная функция языка. Именно с помощью языковых средств мы фиксируем информацию об окружающей действительности, именно в языке осуществляются различные интеллектуальные процедуры по переработке этой информации.

Основными *формами*, в которых фиксируются знания о мире в результате интеллектуальной познавательной деятельности, являются *понятия*, *суждения* и *теории*.

Понятие **– это мысль, которая посредством указания на некоторый признак выделяет из универсума и собирает в класс все предметы, обладающие этим признаком.**

В языке понятия выражаются посредством особого рода описательных терминов. Например, термин «четырехугольник с равными сторонами и равными углами» выражает понятие, выделяющее класс квадратов из универсума четырехугольников, а термин «вещество, молекулы которого состоят из одного атома, имеющего заполненную внешнюю электронную оболочку» – понятие, выделяющее множество инертных газов из универсума веществ.

Суждение **– мысль, содержащая утверждение о наличии в действительности некоторого положения дел.**

Суждения фиксируются в языке с помощью повествовательных (декларативных) предложений. Эти предложения могут выражать суждения о присущности или неприсущности *свойств* предметам («Снег бел», «Сера не электропроводна»), о наличии или отсутствии *отношений* между предметами («Петербург севернее Москвы», «Дездемона не любит Яго»), о связях между ситуациями («Если вода нагрета до 100° С, то она кипит»).

Следует иметь в виду, что одно и то же суждение может быть выражено в языке с помощью различных предложений. Например, одна и та же мысль передается в предложениях «Снег бел», «Снег относится к числу белых предметов», «Свойство белизны присуще снегу». С другой стороны, повествовательное предложение в различных контекстах своего употребления может выражать разные суждения. К примеру, предложение «Ребенок родился здоровым» обычно констатирует нормальное состояние новорожденного, однако для президента США Трумэна телеграмма с данным текстом сообщала иную информацию – суждение об успешном испытании атомной бомбы.

Чтобы избежать указанной неоднозначности, множественности различных содержательных трактовок предложения, необходимо точно зафиксировать его смысл – ту информацию о действительности, которую предложение несет. В этом случае мы получим *высказывание* – предложение, выражающее определенное суждение, т. е. выражающее мысль о наличии определенного положения дел.

Всякое высказывание может быть оценено как истинное или ложное («истина» и «ложь» – возможные значения высказываний). Причем в классической логике эти термины трактуются следующим образом:

Высказывание *истинно* тогда и только тогда, когда описываемое в нем положение дел имеет место в действительности, в противном случае оно *ложно*.

Например, высказывание «Медь электропроводна» истинно, поскольку свойство электропроводности присуще меди. Высказывание «Сера электропроводна» ложно, поскольку в действительности это свойство не присуще сере.

Еще одной формой отражения действительности на рациональной ступени познания, наряду с понятием и суждением, является научная теория.

***Теория* – это система связанных между собой понятий и высказываний, относящихся к некоторой предметной области (в качестве такой области могут выступать множество чисел, множество точек, линий и плоскостей, множество живых организмов и т. д.).**

Главная задача теории – установление закономерностей функционирования объектов некоторой предметной области. Кроме того, теория может выступать как средство объяснения и предсказания явлений. Примерами теорий могут служить геометрия Евклида, механика Ньютона, специальная и общая теории относительности, теория эволюции Дарвина.

Одной из задач логики, как уже говорилось, является исследование приемов мышления – тех интеллектуальных процедур, которые осуществляются в процессе познавательной деятельности. К их числу относятся, например, определение, классификация, научное объяснение, выдвижение и проверка гипотез, постановка и решение задач и проблем, научная полемика. Однако центральное место в логических исследованиях занимает анализ такой познавательной операции, как рассуждение. Учение о правильных способах рассуждения – *дедуктивная логика* – является ядром логической науки с момента ее возникновения и до наших дней.

Что же представляет собой рассуждение? В самом общем виде на этот вопрос можно ответить следующим образом.

Рассуждением **называется процедура обоснования некоторого высказывания путем пошагового выведения его из других высказываний.**

Простейшим видом рассуждения является умозаключение.

Умозаключение **– это непосредственный переход от одного или нескольких высказываний $A_1, A_2,..., A_n$ к некоторому высказыванию B.**

Высказывания $A_1, A_2,..., A_n$, из которых делается вывод, называются *посылками*, а высказывание **B**, которое выводится из посылок, называется *заключением*.

В качестве примера умозаключения приведем рассуждение, посредством которого, согласно легенде, калиф Омар обосновывал необходимость сожжения Александрийской библиотеки:

> «Если ваши книги согласны с Кораном, то они излишни. Если же ваши книги не согласны с Кораном, то они вредны. Но вредные или излишние книги следует уничтожить. Поэтому ваши книги следует уничтожить».

В приведенном умозаключении первые три высказывания являются посылками, а четвертое – заключением.

Умозаключение принято формулировать посредством конструкций следующего вида:

$$\frac{\mathbf{A_1, A_2,\ldots, A_n}}{\mathbf{B},}$$

где над чертой записываются посылки, под чертой – заключение, а сама черта выражает акт выведения заключения из посылок.

Умозаключение является простейшей разновидностью рассуждения, так как обосновываемый им тезис (его роль играет заключение **B**) непосредственно, как бы в один шаг, выводится из посылок $\mathbf{A_1, A_2,\ldots, A_n}$, которые можно рассматривать в качестве *аргументов* в пользу *тезиса.*

Однако многие рассуждения имеют гораздо более сложную структуру. Так, в ходе рассуждения могут осуществляться несколько умозаключений, причем заключения одних могут стать посылками в других. Рассмотрим пример.

> В одном городе было совершено ограбление банка. Подозрение пало на известных рецидивистов Смита, Джонса и Брауна. В ходе следствия выяснилось, что Джонс никогда не ходит на дело без Брауна. По крайней мере один из рецидивистов – Смит или Джонс – замешан в преступлении. У Брауна есть прочное алиби. Инспектор полиции, проводивший расследование, на основании этих данных предъявил обвинение Смиту.

При этом он мог рассуждать следующим образом:

Данные, полученные в ходе расследования, свидетельствуют о том, что

(1) Если Джонс замешан в преступлении, то в нем замешан и Браун (Джонс без Брауна на дело не ходит).

(2) Браун не замешан в преступлении (у него алиби).

Следовательно,

(3) Джонс не замешан в преступлении.

Но, согласно данным следствия,

(4) Смит или Джонс замешаны в преступлении.

Поэтому, с учетом непричастности к преступлению Джонса, можно сделать вывод:

(5) Смит замешан в преступлении.

В приведенном рассуждении осуществлены два умозаключения. В первом из них посылками являются высказывания (1) и (2), а заключением – высказывание (3). Во втором умозаключении посылками являются (3) и (4), а заключением – высказывание (5).

Иногда в ходе рассуждения для обоснования некоторого высказывания (назовем его **C**) применяются так называемые *непрямые способы аргументации*. В этом случае строятся вспомогательные рассуждения, в состав которых могут вводиться дополнительные допущения. Из последних стремятся получить следствия определенного рода (характер принимаемых допущений и искомых следствий обычно зависит от вида обосновываемого высказывания **C**). При успешном решении указанных задач вспомогательные рассуждения считаются завершенными, а в основной части рассуждения появляется высказывание **C**.

Примером непрямого способа аргументации являются широко распространенные *рассуждения от противного*. Их структура состоит в следующем. Для обоснования высказывания **B** принимается в качестве дополнительного допущения противоречащее ему высказывание «Неверно, что **B**», при этом из допущения и некоторого множества аргументов **Г** стремятся получить противоречие – высказывания «**D**» и «Неверно, что **D**». При успешном осуществлении этого вспомогательного рассуждения считается, что допущение было ложным, а само **B** обосновано посредством аргументов **Г**.

Покажем, как мог бы инспектор полиции в рассмотренном примере прийти к выводу о виновности Смита, рассуждая от противного.

Примем сначала допущение о том, что

(1) Смит не замешан в преступлении.

Из этого допущения и установленного факта –

(2) Смит или Джонс замешаны в преступлении

– получим высказывание:

(3) Джонс замешан в преступлении.

Из него, а также из другого установленного в ходе следствия факта –

(4) Если Джонс замешан в преступлении, то и Браун замешан в нем

– выводим высказывание:

(5) Браун замешан в преступлении.

Однако следствие выяснило, что

(6) Браун не замешан в преступлении.

Таким образом, в рассуждении получено противоречие – (5) и (6). Следовательно, допущение (1) ложно, а высказывание

(7) Смит замешан в преступлении

считается обоснованным посредством аргументов (2), (4) и (6).

Мы рассмотрели большинство вопросов, вставших при определении предмета логики. Осталось ответить только на вопрос, в чем состоит *нормативный характер* этой науки.

Формы и приемы интеллектуальной познавательной деятельности исследуются не только в логике, но и в других науках – психологии, психолингвистике, а также в особом разделе философии, называемом эпистемологией. В перечисленных науках процесс мышления исследуется главным образом в том виде, как он протекает в действительности. Их основная цель состоит в адекватном описании, обобщении и объяснении реальной практики осуществления познавательных процедур.

Логика также исследует объективно существующие законы и формы мышления. Однако она не ставит перед собой задачу ответить на вопросы, как человек мыслит на самом деле, почему он мыслит так, а не иначе, каковы особенности мышления различных групп населения (социальных, возрастных, национальных и т. п.). Поэтому такие имеющие широкое хождение выражения, как «женская логика», «логика ребенка», «логика классовой борьбы», к проблематике логики как науки отношения не имеют.

Задача логики состоит в том, чтобы ответить на другой вопрос: как мы должны мыслить, если хотим достичь цели познавательного процесса – получить адекватные знания об исследуемых объектах. Логика, таким образом, является наукой не о сущем, а о должном, наукой нормативной. Она вырабатывает нормы, критерии правильности осуществления интеллектуальных процедур, формируя тем самым некий канон, стандарт, идеал, следование которому является необходимым условием успешного осуществления научной и вообще любой рациональной деятельности.

Реальная же практика мыслительных операций исследуется в логике с точки зрения ее соответствия или несоответствия законам и правилам этой науки. Иначе говоря, логик стремится не столько к тому, чтобы выяснить, как рассуждает тот или иной человек, как он образует понятия и пользуется ими, сколько к тому, чтобы установить, правильно ли он рассуждает, правильно ли он оперирует понятиями.

Возникает вопрос, а каковы критерии правильности осуществления различных мыслительных операций? Какие рассуждения можно считать правильными? Каким требованиям должны удовлетворять определение, классификация, научная полемика и т. д.? На многие из этих вопросов вы найдете ответ в других разделах учебника. В данной же главе мы рассмотрим лишь вопрос о критериях правильности умозаключений, поскольку он связан с введением фундаментальных понятий логики – понятий *логической формы* и *логического следования*.

§2. Логическая форма. Отношение логического следования

В этом параграфе будет сформулирован критерий правильности умозаключений. Приступая к рассмотрению данной проблемы, необходимо иметь в виду следующее: вопрос о том, является ли некоторое умозаключение правильным или неправильным, нельзя смешивать с вопросом, какими – истинными или ложными – являются его посылки и заключение, т. е. имеют ли место в действительности описываемые ими положения дел. Эти вопросы необходимо четко различать, поскольку тот или иной ответ на второй из них не всегда предопределяет ответ на первый.

Рассмотрим умозаключение халифа Омара, приведенное в предыдущем параграфе:

(1) Если ваши книги согласны с Кораном, то они излишни.
Если ваши книги не согласны с Кораном, то они вредны.
Если ваши книги излишни или вредны, то их следует уничтожить.
____
Ваши книги следует уничтожить.

В данном случае истинность посылок и заключения представляется весьма сомнительной. Однако из того, что какие-либо посылки и заключение ложны, нельзя сделать вывод о неправильности умозаключения (так же, конечно, как нельзя сделать вывод о том, что оно правильно). Рассмотрим другой пример:

(2) А. П. Бородин занимался химией или сочинял музыку.
А. П. Бородин сочинял музыку или писал детективные романы.
Неверно, что А. П. Бородин писал детективные романы.
____
А. П. Бородин занимался химией.

В этом умозаключении и каждая из посылок, и заключение являются истинными. Однако лишь на этом основании нельзя утверждать, что данное умозаключение правильно, вопрос о его корректности остается пока открытым. Лишь в одном случае для оценки умозаключения как правильного или неправильного достаточно знать значения его посылок и заключения.

Если каждая из посылок истинна, а заключение ложно, то умозаключение заведомо неправильно.

В этом случае оно не сохраняет истинность при выведении одного высказывания из других, а потому не может быть использовано в целях получения истинного знания.

Можно ли, например, определить, является ли правильным следующее умозаключение, если установить значения его посылок и заключения?

(3) М. Ю. Лермонтов жил в XVIII веке, или он жил в XIX веке.
М. Ю. Лермонтов жил в XIX веке, или он жил в XX веке.
Неверно, что М. Ю. Лермонтов жил в XX веке.
____
М. Ю. Лермонтов жил в XVIII веке.

Поскольку все три посылки здесь истинны, а заключение ложно, постольку приведенное умозаключение заведомо неправильно.

Возникает вопрос, каким же образом можно определить, являются ли правильными умозаключения при иных значениях посылок или заключения. Постараемся ответить на него сначала применительно к умозаключению (2). С этой целью сравним умозаключения (2) и (3). Очевидно, что содержания входящих в их состав высказываний различны: во-первых, у них разный предмет мысли (в одном случае речь идет о Бородине, в другом – о Лермонтове), во-вторых, различается информация о предмете мысли (в одном случае она касается рода деятельности, а в другом – времени жизни человека). Однако можно заметить определенное структурное сходство высказываний, входящих в состав этих умозаключений, т. е. что сам способ рассуждения в обоих случаях одинаков.

Совпадение структур умозаключений (2) и (3) можно продемонстрировать следующим образом. Заменим простые высказывания, входящие в состав посылок и заключения умозаключения (2), малыми буквами из середины латинского алфавита: например, высказывание «Бородин занимался химией» – буквой **p**, «Бородин сочинял музыку» – буквой **q**, «Бородин писал детективные романы» – буквой **r**. В результате замены получим языковую конструкцию:

(4) **p** или **q**
q или **r**
Неверно, что **r**
―――――――――
p.

Точно такая же конструкция получается при замене в умозаключении (3) высказывания «Лермонтов жил в XVIII веке» буквой **p**, высказывания «Лермонтов жил в XIX веке» – буквой **q** и высказывания «Лермонтов жил в XX веке» – буквой **r**. Таким образом, мы показали, что умозаключения (2) и (3) имеют одинаковую структуру или, как говорят, одинаковую *логическую форму*. Выражение (4) как раз и фиксирует логическую форму этих умозаключений. В дальнейшем для простоты изложения будем понимать под логической формой некоторого языкового контекста саму языковую конструкцию, получающуюся заменой некоторых частей данного контекста буквами (*параметрами*), в нашем примере – выражение (4).

В данном случае логическая форма высказываний, входящих в умозаключение, выражает ту часть их содержаний, которая получается в результате абстрагирования (отвлечения) от содержания простых высказываний в их составе. Заменяя простые высказывания в некотором языковом контексте буквами (параметрами), мы как раз и абстрагируемся от того, что именно в них утверждается, какие положения дел они описывают. Однако не происходит абстрагирования от того, каким образом и с помощью каких союзов простые высказывания сочленяются в составе сложных. Кроме того, при данном способе выявления логической формы различные простые высказывания в языковом контексте заменяются различными *параметрами*, а одинаковые простые высказывания (везде, где они встречаются в данном контексте) – одинаковыми параметрами.

Вернемся теперь к анализу умозаключений (2) и (3). Мы установили, что они имеют одинаковую логическую форму – выражение (4), причем умозаключение (3) заведомо неправильное, так как все его посылки истинны, а заключение ложно. Это означает, что, применяя умозаключение формы (4), мы не имеем гарантии выведения из истинных посылок обязательно истинного заключения. А раз в умозаключениях этой структуры можно в некоторых случаях из истинных высказываний получить ложное следствие, то данный способ рассуждения нельзя считать надежным, и мы не можем утверждать, что его посылки действительно обосновывают заключение. Поэтому любое умозаключение, логическая форма которого представлена выражением (4), квалифицируют в логике как неправильное (независимо от того, какими – истинными или ложными – являются его посылки и заключение). Следовательно, и умозаключение (2) также неправильно, несмотря на то, что и посылки, и заключение в нем – истинные высказывания. Истинность его заключения не обусловлена истинностью посылок, или, говоря другими словами, из его посылок не следует логически заключение.

Итак, для того чтобы показать, что некоторое умозаключение неправильно, достаточно найти по крайней мере одно умозаключение той же логической формы, все посылки которого истинны, а заключение ложно. Тем самым мы выделили критерий неправильности умозаключения. Он может быть сформулирован следующим образом.

Умозаключение является *неправильным*, если и только если его логическая форма не гарантирует, что при истинных посылках мы обязательно получим истинное заключение, т. е. существует умозаключение данной логической формы с истинными посылками и ложным заключением.

Теперь совсем нетрудно сформулировать критерий правильности умозаключений.

Умозаключение является *правильным*, если и только если его логическая форма гарантирует, что при истинности посылок мы обязательно получим истинное заключение,

т. е. не существует умозаключения данной формы с истинными посылками и ложным заключением.

При выполнении этого условия говорят, что между посылками и заключением имеет место *отношение логического следования*, что заключение логически следует из посылок.

К числу правильных относится, например, умозаключение (1). Выявим его логическую форму. С этой целью заменим простые высказывания, входящие в состав его посылок и заключения, параметрами: высказывание «Ваши книги согласны с Кораном» – буквой **p**, «Ваши книги излишни» – буквой **q**, «Ваши книги вредны» – буквой **r**, «Ваши книги следует уничтожить» – буквой **s**. Получим в результате выражение:

(5) Если **p**, то **q**
Если неверно, что **p**, то **r**
Если **q** или **r**, то **s**
____
s.

Теперь, согласно сформулированному выше критерию, мы должны осуществить обратную процедуру (процедуру *интерпретации параметров*), которая в данном случае состоит в замене букв **p**, **q**, **r** и **s** в выражении (5) произвольными простыми высказываниями – как истинными, так и ложными. Осуществляя различные интерпретации параметров, мы обнаруживаем следующую закономерность: всегда, когда при указанной замене посылки оказываются одновременно истинными, заключение также будет истинным. Наличие данной закономерности как раз и свидетельствует о правильности всех умозаключений формы (5), о наличии логического следования между их посылками и заключениями.

Возникает вопрос, почему в правильном рассуждении (1) заключение оказалось ложным. Причина этого – ложность одной или нескольких из его посылок. Вообще, ложное заключение может быть получено в результате умозаключения в следующих случаях:

1) если все его посылки истинны, но само умозаключение неправильно;
2) если умозаключение правильно, но в нем имеется некоторая ложная посылка;
3) если имеется ложная посылка, и само умозаключение неправильно.

Обратим внимание на тот факт, что в указанных случаях заключение может оказаться как ложным, так и истинным. Если же к истинным посылкам применяется правильное умозаключение, то с логической неотвратимостью будет получено истинное заключение.

Правильность умозаключения (1) и неправильность умозаключения (2) была обусловлена, по существу, особенностями их структуры, которые выражались в том, каким образом и с помощью каких союзов простые высказывания сочленялись в сложные в их посылках и заключениях. Действительно, при выявлении их логических форм мы абстрагировались от содержания простых высказываний. Однако при замене простых высказываний параметрами происходит отвлечение не только от того, какое положение дел они описывают, но также и от внутренней структуры этих высказываний. Вместе с тем в некоторых случаях невозможно решить вопрос о правильности или неправильности умозаключения без учета внутренней структуры простых высказываний, входящих в его состав. Рассмотрим в этой связи следующее умозаключение:

(6) Некоторые граждане России являются христианами.
Всякий мусульманин не является христианином.
___
Некоторые мусульмане не являются гражданами России.

В этом примере посылки и заключение представляют собой три различных простых высказывания. Однако, несмотря на различия между собой, внутренние структуры этих высказываний связаны друг с другом: в заключении зафиксирован определенный тип отношения между двумя множествами (множеством мусульман и множеством российских граждан), а вывод о наличии данного отношения делается на основании зафиксированных в посылках отношений каждого из этих множеств к третьему множеству (множеству христиан). Для решения вопроса о правильности подобных выводов необходим учет внутренней структуры простых высказываний, а следовательно, использовавшийся ранее способ выявления логической формы здесь недостаточен. Итак, для того чтобы выяснить, являются ли правильными такого рода умозаключения, требуется более глубокий уровень анализа их логических форм.

Теперь при выявлении логической формы мы, как и ранее, будем отвлекаться от того, о каких именно объектах идет речь в высказываниях и что именно о них говорится. В то же время мы не должны, например, абстрагироваться от того, идет ли речь в высказывании обо всех или же о некоторых предметах какого-либо класса, содержит ли это высказывание утверждение или отрицание. Информация, которая будет утрачиваться при таком способе анализа, выражается посредством таких терминов, как «граждане России», «христиане», «мусульмане». Их называют *нелогическими терминами.* К числу же *логических* относят такие термины, как «всякий», «некоторый», «является» («есть»), «не является» («не есть»), а также «и», «или», «если ..., то», «неверно, что» и др. При том способе выявления логической формы, о котором идет сейчас речь, отвлечения от смысла логических терминов не происходит, а нелогические термины заменяют параметрами, причем различные термины – различными параметрами, а одинаковые (везде, где они встречаются в умозаключении) – одинаковыми параметрами.

Попытаемся выявить логическую форму умозаключения (6). Для этого заменим нелогические термины параметрами – большими латинскими буквами, например, термин «гражданин России» – буквой **P**, «христианин» – буквой **Q**, «мусульманин» – буквой **S**. Получим выражение, задающее логическую форму умозаключения (6):

(7) Некоторый **P** есть **Q**
Всякий **S** не есть **Q**
―――――――――――
Некоторый **S** не есть **P**.

Теперь мы можем решить вопрос о правильности или неправильности умозаключения (6), при этом будут использованы те же, что и раньше, критерии правильности и неправильности, только применительно к более глубокому уровню анализа логической формы.

Умозаключение (6) является неправильным, поскольку параметры **P**, **Q** и **S** в составе его логической формы – выражения (7) – могут быть проинтерпретированы таким образом, что данное выражение превратится в умозаключение с истинными посылками и ложным заключением. Подставим, например, вместо буквы **P** термин «существа, живущие в воде», вместо **Q** – термин «теплокровные существа», а вместо **S** – «рыбы». Получим умозаключение:

(8) Некоторые существа, живущие в воде, являются теплокровными.
Всякая рыба не является теплокровным существом.
―――――――――――
Некоторые рыбы не являются существами, живущими в воде.

Очевидно, что посылки умозаключения (8) истинны, а его заключение ложно. Поэтому все умозаключения формы (7), в том числе и умозаключение (6), неправильны, так как из их посылок не следуют логически соответствующие заключения.

В рассуждениях (6) и (8) содержатся нелогические термины одного и того же типа, одинаковой категории. Каждый из них репрезентирует (представляет) некоторое множество предметов (например, множество российских граждан или множество теплокровных существ). Такого рода знаки иногда называют *общими терминами*. Однако в умозаключениях могут содержаться нелогические термины различных категорий. Каким же образом осуществляется анализ умозаключений и выявление их логических форм в этом случае? Рассмотрим пример:

(9) М. Тэтчер популярнее С. Рушди.
М. Тэтчер – британский политик.
С. Рушди – британский писатель.
___
Некоторые британские политики популярнее некоторых британских писателей.

В составе данного умозаключения содержатся нелогические термины трех типов. Во-первых, это общие термины «британский политик» и «британский писатель», которые репрезентируют множества предметов. Во-вторых, это термины «М. Тэтчер» и «С. Рушди», которые обозначают отдельные предметы (индивиды), их называют *единичными терминами* или *именами*. К третьему типу относится термин «популярнее» – *знак отношения* между предметами.

При выявлении логической формы данного языкового контекста все нелогические термины будут заменены буквами (параметрами). При этом, конечно же, утратится информация о том, каковы конкретные значения этих терминов, какие именно множества, индивиды или отношения они представляют. Однако информация о том, к какой категории относятся нелогические термины, каков тип их значения, утрачиваться не должна. С этой целью каждой категории нелогических терминов сопоставляют особый сорт параметров. В процессе выявления логической формы произвольный нелогический термин разрешается замещать параметром лишь такого сорта, который соответствует категории этого термина.

Договоримся, например, что буквами **S**, **P**, **Q**, $\mathbf{S_1}$,... можно замещать общие термины, буквами **a**, **b**, **c**, $\mathbf{a_1}$,... – единичные термины, а символами **R**, $\mathbf{R}_1$,... – знаки отношений. Тогда вместо терминов «британский политик» и «британский писатель» можно подставить, соответственно, параметры **S** и **P**, вместо терминов «М. Тэтчер» и «С. Рушди» – параметры **a** и **b**, вместо термина «популярнее» – символ **R**. При указанных заменах получим конструкцию, фиксирующую логическую форму умозаключения (9):

(10) **a** находится в отношении **R** к **b**
a есть **S**
b есть **P**
―――――――――――――――――――
Некоторые **S** находятся в отношении **R** к некоторым **P**.

Умозаключения данной структуры являются правильными, между посылками и заключением в них имеет место отношение логического следования, поскольку, какие бы мы ни подставляли единичные термины вместо **a** и **b**, общие термины вместо **S** и **P**, знаки отношений вместо **R** в выражение (10), обязательно получится умозаключение с истинным заключением во всех случаях, когда его посылки окажутся истинными.

Подведем некоторые итоги. При формулировке критериев правильности и неправильности умозаключений нами были затронуты два фундаментальных понятия логики – понятия *логической формы* и *логического следования*. Постараемся теперь, обобщив сказанное выше, ввести эти понятия более строгим образом.

Под логической формой мысли обычно понимают способ связи составных частей ее содержания в отличие от самого этого содержания, результат отвлечения от «материи» мысли, т. е. от того, какие именно индивиды, свойства, отношения, классы, ситуации и т. п. являются ее предметами. При этом предполагается, что и сама мысль, и ее логическая форма имеют языковое воплощение: мысль (например, понятие, суждение) адекватно оформляется осмысленным выражением естественного языка (описательным термином, предложением), а ее логическая форма фиксируется посредством языковой конструкции, содержащей параметры предложений или нелогических терминов языка.

Сказанное означает, что вести речь о логической форме можно не только применительно к самой мысли, но и к языковому контексту, выражающему данную мысль. В последнем случае и логическую форму естественно также рассматривать в качестве особого рода конструкции языка.

Логической формой **языкового контекста будем называть выражение, фиксирующее ту часть содержания контекста, которая остается в результате отвлечения от конкретных содержаний нелогических терминов или же от содержаний простых высказываний, входящих в данный контекст.**

Процедура отвлечения от содержаний нелогических терминов и простых высказываний осуществляется посредством замены указанных языковых выражений параметрами соответствующих категорий, причем одинаковые выражения заменяются одинаковыми параметрами, а различные – различными.

При выявлении логической формы контекста сохраняется информация о типах значений заменяемых выражений, а также о том, в каком порядке и с помощью каких логических терминов они сочленяются в этом контексте. Последнее как раз и имеют в виду, когда логическую форму контекста трактуют как способ связи его нелогических составляющих.

Следует также уяснить, что логическую форму контекста можно выявить по-разному, с различной степенью глубины анализа. Способ выявления логической формы обусловлен, во-первых, тем, учитывается ли внутренняя структура простых высказываний, и во-вторых, тем, какие выделяются категории нелогических терминов.

В качестве примера осуществим логический анализ на различных уровнях следующего высказывания:

«Иван сильнее Петра, и Петр умнее Ивана».

Если внутренняя структура простых высказываний, входящих в его состав, учитываться не будет, то логическая форма примет следующий вид:

p и **q**,

где параметр **p** подставлен вместо простого высказывания «Иван сильнее Петра», а параметр **q** – вместо «Петр умнее Ивана».

При более глубоком анализе, когда структура простых высказываний принимается во внимание, заменяться параметрами должны не сами высказывания, а нелогические термины в их составе. Предположим, что выделены две категории нелогических терминов – общие (знаки множеств) и единичные (знаки индивидов). Тогда логическую форму рассматриваемого высказывания можно выразить так:

a есть **P** и **b** есть **Q**,

где параметрами **a** и **b** заменены единичные термины «Иван» и «Петр», а параметрами **P** и **Q** – общие термины «человек, который сильнее Петра» и «человек, который умнее Ивана» соответственно.

Если же наряду с общими и единичными терминами в качестве особой категории нелогических терминов выделяются знаки отношений, то логическая форма может быть зафиксирована иным образом:

a находится в отношении $\mathbf{R_1}$ к **b** и **b** находится в отношении $\mathbf{R_2}$ к **a**,

где **a** и **b** подставлены вместо единичных терминов «Иван» и «Петр», $\mathbf{R_1}$ и $\mathbf{R_2}$ подставлены вместо знаков отношений «сильнее» и «умнее».

Дадим теперь более строгую трактовку другого фундаментального понятия логики – понятия *логического следования*. Прежде всего отметим, что логическое следование представляет собой отношение между высказываниями по форме. Это означает, что для решения вопроса о наличии или отсутствии этого отношения между высказываниями необходимо выявить их логические формы. Более того, можно считать, что отношение логического следования имеет место не только между определенными высказываниями естественного языка, но и между их логическими формами. Причем установив факт наличия (или отсутствия) отношения следования применительно к логическим формам высказываний, мы можем заключить, что данное отношение имеет (или не имеет) место и между самими высказываниями.

Пусть **B** есть логическая форма некоторого высказывания, а **Г** – множество логических форм каких-либо высказываний. Иначе говоря, **B** и элементы множества **Г** представляют собой не высказывания естественного языка, а выражения, которые содержат параметры и становятся истинными или ложными лишь при *интерпретации* последних. Под интерпретацией параметров обычно понимают приписывание им значений соответствующего типа (определенных индивидов, множеств, отношений и др.). Сопоставить значения параметрам можно, в частности, осуществив вместо них подстановку значимых языковых выражений соответствующих категорий (именно этот механизм интерпретации использовался нами ранее).

Из Г *логически следует* B, если и только если не существует такой интерпретации параметров, входящих в со-

став Г и В, при которой все выражения из Г принимают значения «истина», а В – значение «ложь».

Приведенное определение логического следования можно эквивалентным образом переформулировать так:

Из Г *логически следует* В, если и только если при любой интерпретации параметров в составе Г и В, при которой все выражения из Г принимают значение «истина», выражение В также примет значение «истина».

§3. Логические законы. Логические теории

Рассматривая вопрос о предмете той или иной науки, нельзя обойтись без выяснения специфики ее законов. Сказанное, конечно же, относится и к логике. Что же представляют собой логические законы?

Выше уже говорилось, что любое высказывание может быть оценено как истинное или ложное. Однако способы установления истинности или ложности высказываний разных типов могут существенно отличаться. В некоторых случаях значения высказываний устанавливают путем непосредственного обращения к действительности (так поступают, например, если хотят выяснить, истинны ли высказывания «Идет дождь», «Некоторые школьники остроумны»). В других случаях оценка высказываний осуществляется в рамках конкретных научных теорий (например, указанным образом поступают, устанавливая значение высказывания «Две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой»). Однако для определенного класса высказываний вопрос об их истинности или ложности может быть решен с использованием исключительно логических средств, на основе анализа их логических форм.

В качестве примера покажем, как устанавливается в классической логике значение высказывания:

(1) «Идет дождь, или неверно, что идет дождь».

Заменяя параметром **p** простое высказывание «Идет дождь», получаем логическую форму высказывания (1):

(2) **p** или неверно, что **p**.

Это выражение содержит информацию о том, что в действительности имеет место какое-то из двух положений дел: (а) ситуация, описанная в **p**, (б) отсутствие этой ситуации. Данная информация основана на смысле логических терминов «или» и «неверно, что» и представляет собой общую часть содержаний высказываний формы (2).

Будем теперь осуществлять всевозможные интерпретации параметра **p** в (2), подставляя вместо него произвольные простые высказывания. Очевидно, что при некоторых интерпретациях на месте **p** окажется истинное, а в остальных случаях – ложное высказывание. Если **p** проинтерпретировано как истинное высказывание, то будет иметь место положение дел (а) и форма (2) превратится в истинное высказывание. Если же **p** проинтерпретировано как ложное высказывание, то будет иметь место положение дел (б) и форма (2) опять-таки преобразуется в истинное высказывание.

Таким образом, выражение (2) оказывается истинным при любой интерпретации параметра **p**. Поэтому все высказывания указанной формы истинны, в том числе и высказывание (1). Оно истинно независимо от того, что в действительности происходит: идет дождь или нет. Истинность высказывания (1) обусловлена его логической формой.

Высказывания, истинные в силу своей логической формы, называют *логически истинными.* Сами же логические формы таких высказываний, зафиксированные в языке, содержащем параметры – скажем, выражение (2), – называют *логическими законами.*

Логический закон **– это такая логическая форма высказывания, которая принимает значение «истина» при любой интерпретации параметров, входящих в ее состав.**

Помимо логически истинных существует еще один тип высказываний естественного языка, значения которых можно установить, основываясь только на анализе их логических форм. Это *логически ложные* высказывания. Их логические формы принимают значение «ложь» при любой интерпретации параметров в их составе. Пример такого высказывания:

(3) «Идет дождь, и неверно, что идет дождь».

Его логической формой является выражение

(4) **p** и неверно, что **p**.

Очевидно, что в результате подстановки вместо параметра **p** в форму (4) произвольного высказывания обязательно получится ложное высказывание. Поэтому высказывание (3) ложно в силу своей логической формы.

Высказывания, которые не являются ни логически истинными, ни логически ложными, называют *логически недетерминированными*. Их значения нельзя установить логическими средствами, поскольку одни высказывания такой формы истинны, а другие ложны. Пример логически недетерминированного высказывания:

(5) «Идет дождь, или светит солнце».

Его логическая форма имеет вид:

(6) **p** или **q**.

Если при интерпретации параметров **p** и **q** вместо какого-нибудь из них подставить истинное высказывание, то выражение (6) превратится в истинное высказывание. Если же и вместо **p**, и вместо **q** подставить ложные высказывания, то полученное выражение окажется ложным.

В предыдущем параграфе отмечалось, что логическая форма языкового контекста может выявляться с разной степенью глубины. Для успешного решения вопроса о том, является ли некоторое высказывание логически истинным, необходим адекватный уровень анализа при выявлении его формы. Поясним сказанное на примере. Рассмотрим высказывание:

(7) «Всякий школьник не остроумен, или некоторые школьники остроумны».

Данное высказывание состоит из двух отличных друг от друга простых высказываний, которые связаны союзом «или». Поэтому если при выявлении его логической формы мы будем полностью абстрагироваться от содержаний простых высказываний, то получим выражение

(8) **p** или **q**,

где буквой **p** замещено высказывание «Всякий школьник не остроумен», а буквой **q** – «Некоторые школьники остроумны». Легко установить, что выражение (8) не относится к числу логических законов.

Выявим теперь логическую форму высказывания (7) иным способом, учитывая внутреннюю структуру простых высказываний. Замещая общие термины «школьник» и «остроумный человек» параметрами **S** и **P** соответственно, получим выражение:

(9) Всякий **S** не есть **P** или некоторый **S** есть **P**.

Данное выражение является логическим законом, поскольку любое высказывание этой формы всегда принимает значение «истина». Следовательно, высказывание (7) логически истинно, но для установления данного факта потребовался более глубокий уровень анализа его логической формы.

Понятие логического закона, наряду с понятием логического следования, является важнейшим в *дедуктивной логике*. Ведь к основным задачам, решаемым в рамках последней, относятся выделение и систематизация класса логических законов, а также форм правильных умозаключений (таких умозаключений, в которых заключения логически следуют из посылок). Попытаемся теперь ответить на вопрос, с помощью каких средств и методов решаются эти проблемы в современной логике.

Для достижения указанных целей создаются особые *логические теории*. Их построение осуществляется в специальных искусственных языках, которые называются *формализованными*. Формализованные языки предназначены для точной фиксации логических форм высказываний естественного языка, без чего, как уже говорилось, невозможно выделить множества логических законов и форм правильных умозаключений.

В принципе, логические формы высказываний можно было бы выражать и в обычном, естественном языке (как это делалось нами до сих пор), необходимо лишь дополнить его списками параметров, предназначенных для замещения простых высказываний или нелогических терминов различных категорий. Однако естественный язык обладает рядом особенностей, серьезно затрудняющих процедуру точного воспроизведения логических форм.

Во-первых, в нем отсутствуют четкие синтаксические критерии правильности построения предложений, поэтому та же трудность возникает и относительно их логических форм.

Во-вторых, грамматическая структура высказываний не всегда соответствует их логической форме. Например, высказывания

«Москва находится между Киевом и Нижним Новгородом» и «Москва находится южнее Мурманска и Архангельска» имеют сходную грамматическую структуру, однако их логические формы различны: первое высказывание – простое (в нем утверждается наличие отношения между тремя городами), второе же, по существу, является сложным и состоит из двух простых: «Москва южнее Мурманска» и «Москва южнее Архангельска».

В-третьих, выражения естественного языка многозначны и допускают различные трактовки. Например, выражение вида «**А** или **В** и **С**» (например, «Иванов или Петров и Сидоров сдали экзамен на "отлично"») может быть истолковано и как разделительное высказывание, части которого «**А**» и «**В** и **С**» связаны союзом «или», и как соединительное, в котором части «**А** или **В**» и «**С**» связаны союзом «и». Более того, сами логические союзы в различных контекстах естественного языка могут иметь разные смыслы. Например, союз «если..., то» в высказывании «Если вода нагрета до 100°, то она кипит» выражает условную связь, а в высказывании «Если Волга впадает в Каспийское море, то Днепр – в Черное» условной связи не выражает, а указывает на одновременное наличие двух ситуаций.

Формализованные языки лишены этих недостатков. В них имеются четкие и эффективные правила построения логических форм высказываний, причем каждое правильно построенное выражение этих языков имеет единственно возможную смысловую трактовку.

Приведем общую схему построения формализованного языка. Сначала задается его *алфавит* – совокупность простейших, исходных символов, из которых строятся выражения языка всех типов. В алфавит включаются:

1) *логические символы* – знаки для логических терминов;
2) *нелогические символы* – параметры, предназначенные для замещения простых высказываний или нелогических терминов различных категорий;
3) *технические символы* (например, скобки).

Далее формулируются *правила образования* из исходных символов различных классов выражений данного языка. В частности, задается класс *формул,* посредством которых как раз и фиксируются логические формы высказываний.

Определения выражений всех типов в формализованных языках имеют эффективный характер. Пользуясь этими определениями, мы можем, например, однозначно решить вопрос, относится ли некоторый символ к числу знаков алфавита, и если – да, то к какой категории, а для произвольной последовательности символов – является ли она правильно построенной формулой или нет.

В рамках формализованных языков строятся *логические теории*, которые решают следующие задачи:

1) выделяют во множестве формул языка класс формул, представляющих собой логические законы;
2) выделяют во множестве переходов

$$\frac{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n}{\mathbf{B}}$$

(переходов от формул $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ к формуле **B**) – класс тех, которые являются формами правильных умозаключений, другими словами, в которых формула **B** логически следует из $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$.

При решении указанных задач используют сформулированные ранее понятия логического закона и логического следования, которые являются общими для всех логических теорий. Однако в каждой отдельной теории происходит конкретизация этих понятий.

Прежде всего, для каждого вида нелогических символов задается класс их *допустимых интерпретаций*, т. е. указывается, какого типа объекты могут быть сопоставлены в качестве значений нелогическим символам различных категорий в процессе интерпретации формул.

Далее для каждого вида правильно построенных выражений формализованного языка формулируются *правила установления их значений* при произвольной интерпретации нелогических символов. В частности, определяются *условия истинности и условия ложности формул* различных типов. При этом задается точный смысл логических символов языка.

Законом логической теории является формула, принимающая значение «истина» при любых допустимых интерпретациях входящих в нее нелогических символов. Эти формулы называют также *тождественно-истинными*, или *общезначимыми*.

Отношение логического следования определяется в рамках логической теории следующим образом: из формул $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$,..., $\mathbf{A}_n$ *логически следует* формула **B**, если и только если при любой допустимой интерпретации нелогических символов, при которой формулы $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$,..., $\mathbf{A}_n$ принимают значение «истина», формула **B** также принимает значение «истина».

Помимо описанного выше существует и другой способ построения логических систем – так называемые *логические исчисления*. Они решают, по существу, те же самые задачи, но используют иные критерии и процедуры выделения логических законов и способов правильных умозаключений. С целью обоснования того факта, что некоторая формула является логическим законом, строят ее *доказательство* с использованием формул данного формализованного языка. Для обоснования правильности умозаключения конструируют *вывод* логической формы его заключения из логических форм посылок. Указанные процедуры носят чисто формальный, языковой, синтаксический характер – характер оперирования с последовательностями символов. При этом абстрагируются от того, какого типа сущности являются их возможными значениями, и не используют понятий, связывающих языковые выражения с нелингвистическими объектами – понятий интерпретации, истинности и ложности высказываний и др.

Если некоторая логическая теория и некоторое исчисление имеют одинаковые классы законов и выделяют одни и те же формы правильных рассуждений, то говорят, что данное исчисление является *адекватной формализацией* данной логической теории.

В настоящем учебнике мы рассмотрим три известные логические теории, составляющие основу так называемой *классической логики* – классическую логику высказываний, классическую логику предикатов первого порядка и традиционную силлогистику.

ГЛАВА II

КЛАССИЧЕСКАЯ ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

§1. Пропозициональные связки

Первой логической теорией, которая будет рассмотрена, является *классическая логика высказываний.* При выявлении логических форм контекстов естественного языка в этой теории происходит абстрагирование от содержаний простых высказываний, от их внутренней структуры, а учитывается лишь то, с помощью каких союзов и в каком порядке простые высказывания сочленяются в сложные.

Данный уровень анализа логических форм предполагает, во-первых, наличие в формализованном языке нелогических символов только одного типа – параметров, которыми могут замещаться простые высказывания естественного языка. Эти параметры будем называть *пропозициональными переменными* и употреблять в качестве них символы – $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{s}$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{p}_2$,... Во-вторых, все логические символы этого формализованного языка также принадлежат к одной категории, они образуют из одной или нескольких формул новую формулу, а их прототипы в естественном языке, например «и», «или», «если ..., то», являются терминами, образующими из одних высказываний другие, более сложные. Логические символы указанного типа будем называть *пропозициональными связками.*

Логика высказываний **(пропозициональная логика) – это логическая теория, язык которой содержит один тип нелогических символов – пропозициональные переменные, а также один тип логических символов – пропозициональные связки.**

Особенности *языка логики высказываний* определяют специфику ее законов, а также устанавливаемых в этой теории способов правильных рассуждений. Законами пропозициональной логики будут формы таких высказываний, логическая истинность которых обусловлена логическими свойствами содержащихся в них пропозициональных связок и не зависит от свойств других логических терминов. Правильными, с точки зрения логики высказываний, являются лишь такие умозаключения, в которых наличие логического следования между посылками и заключениями обусловлено этими же самыми факторами.

Прежде чем будет осуществлено систематическое построение языка логики высказываний, следует подробнее рассмотреть вопрос о том, какие логические символы имеются в его алфавите. Выше уже говорилось, что алфавит этого формализованного языка содержит некоторое множество пропозициональных связок, образующих из формул новые формулы. Набор пропозициональных связок в алфавите языка логики высказываний может быть различным. Перечислим сначала наиболее употребимые связки и укажем их логический смысл.

Отрицание (будем использовать для него символ «¬») является *унарной* связкой, т. е. оно из одной формулы образует другую, более сложную формулу: из произвольной формулы **A** формулу ¬**A**. Логическое содержание высказывания, имеющего форму ¬**A**, таково: в нем утверждается отсутствие положения дел, описываемого в **A**.

Сказанное означает, что если положение дел, описываемое в **A**, отсутствует (т. е. если **A** ложно), то высказывание ¬**A** соответствует действительности (т. е. ¬**A** истинно). Если же положение дел, описываемое в **A**, имеет место (т. е. если **A** истинно), то утверждение ¬**A** не соответствует действительности (т. е. ¬**A** ложно).

Указанный смысл имеет в естественном языке выражение «неверно, что». Присоединяя его к произвольному ложному высказыванию (например, «$2 > 3$»), мы получаем истинное высказывание («Неверно, что $2 > 3$»), а из истинного (например, «$3 > 2$») это выражение образует ложное высказывание («Неверно, что $3 > 2$»). Таким образом, знаку «¬» в естественном языке соответствует «неверно, что».

Конъюнкция (будем использовать для нее символ «&») является *бинарной* связкой, т. е. она из двух формул образует новую, более сложную формулу: из произвольных формул **A** и **B** – формулу (**A** & **B**). В высказываниях вида (**A** & **B**) утверждается одновременное наличие двух положений дел – описываемого в **A** и описываемого в **B**.

Таким образом, если оба положения дел имеют место в действительности (т. е. если и **A**, и **B** истинны), то конъюнктивное высказывание (**A** & **B**) является истинным. Если же по крайней мере одно (а может быть, и оба) положение дел отсутствует (т. е. если **A** или же **B** ложно), то утверждение (**A** & **B**) не соответствует действительности (т. е. является ложным).

Формулировка конъюнктивных высказываний в естественном языке обычно осуществляется с помощью союза «и». Например, высказывание «2 – простое число, и 2 – четное число» истинно, так как обе его части – истинные высказывания. Ложными являются следующие высказывания: «3 – простое число, и 3 – четное число» (вторая его часть – ложное высказывание); «4 – простое число, и 4 – четное число» (первая его часть – ложное высказывание); «9 – простое число, и 9 – четное число» (обе его части ложны).

Следует, однако, иметь в виду, что не любое употребление союза «и» в контекстах естественного языка выражает указанный смысл связки &. Например, в высказывании «Мэри вышла замуж и родила ребенка» союз «и» выражает мысль не об одновременном наличии двух ситуаций, а о последовательной смене этих ситуаций во времени. Поэтому при выявлении логической формы подобных высказываний в языке пропозициональной логики мы не имеем права заменить союз «и» знаком &.

С другой стороны, смысл конъюнкции может в некоторых случаях адекватно выражаться в естественном языке с помощью других терминов: «а», «но», «как ..., так и», «а также» и т. п. Приведенное в §3 предыдущей главы высказывание «Если Волга впадает в Каспийское море, то Днепр – в Черное» является конъюнктивным, поскольку в нем утверждается одновременное наличие двух ситуаций: впадение Волги в Каспийское море и впадение Днепра в Черное море. Конъюнктивная связка в данном случае передается посредством союза «если ..., то».

Дизъюнкция (будем использовать для нее символ «$\vee$») – бинарная связка, образующая из произвольных формул **A** и **B** новую формулу (**A** $\vee$ **B**). Высказывания данной формы выражают мысль о наличии по крайней мере одного из двух положений дел – описываемого в **A** или описываемого в **B**. При этом не исключается случай их одновременного наличия. Этой связке в естественном языке обычно соответствует союз «или».

Высказывание вида (**A** $\vee$ **B**) истинно, если истинным является хотя бы одно высказывание – **A** или **B** (или же сразу оба). Если же высказывания – как **A**, так и **B** – одновременно ложны, то сложное высказывание (**A** $\vee$ **B**) ложно. Например, высказывание «Петр ходит в 10 класс или занимается спортом» истинно, если выполняется хотя бы одно из двух зафиксированных в нем условий. Если же на самом деле Петр не ходит в 10 класс и не занимается спортом (т. е. если обе части – ложные высказывания), то данное дизъюнктивное высказывание ложно.

В некоторых контекстах естественного языка союз «или» имеет иной смысл. Так, в высказывании «Храбрец или сидит в седле, иль тихо спит в сырой земле» выражается мысль о наличии только одной из двух ситуаций, т. е. утверждается их альтернативность, невозможность одновременного осуществления этих положений дел. В этих случаях союз «или» не может быть заменен дизъюнкцией (символом «$\vee$»), ему будет соответствовать иная связка, которая называется строгой (или альтернативной) дизъюнкцией.

Строгая дизъюнкция (будем использовать для нее символ «$\underline{\vee}$») – бинарная логическая связка, образующая из формул **A** и **B** формулу (**A** $\underline{\vee}$ **B**). Высказывание формы (**A** $\underline{\vee}$ **B**) выражает утверждение о наличии ровно одной из двух ситуаций – описанной в **A** или описанной в **B**. Данное высказывание принимает значение «истина» в двух случаях: 1) когда **A** истинно, а **B** ложно, 2) когда **A** ложно, а **B** истинно (т. е. когда **A** и **B** имеют различные значения). Если же значения **A** и **B** совпадают (т. е. когда они одновременно истинны или одновременно ложны), то (**A** $\underline{\vee}$ **B**) принимает значение «ложь».

Материальная импликация (будем использовать для нее символ «$\supset$» – бинарная связка, образующая из формул **A** и **B** формулу (**A** $\supset$ **B**). В импликативных высказываниях этой формы утверждается, что в случае, когда имеет место положение дел, описываемое в **A**, имеет место также и положение дел, описываемое в **B**. Логическое содержание (**A** $\supset$ **B**) можно эквивалентным образом переформулировать так: не имеет места ситуация, при которой положение дел, описываемое в **A**, наличествует, а положение дел, описываемое в **B**, отсутствует. Отсюда следует, что при истинном **A** и ложном **B** высказывание формы (**A** $\supset$ **B**) ложно. В остальных же случаях оно истинно, т. е. оно истинно, если: 1) **A** и **B** истинны, или 2) **A** ложно, а **B** истинно, или 3) **A** и **B** ложны.

В естественном языке смысл материальной импликации наиболее адекватно выражается союзом «если ..., то». В высказываниях вида «Если **A**, то **B**», а также в формулах (**A** $\supset$ **B**) выражение **A** называют *антецедентом*, а выражение **B** *консеквентом*. В предложениях естественного языка антецедент не всегда предшествует консеквенту. Например, антецедент высказывания «Владельцы акций разоряются, если их курс падает» – его вторая часть, а консеквент – первая.

Союз «если ..., то» во многих случаях своего употребления несет и дополнительную смысловую нагрузку – выражает связь между положениями дел, при которой одно из них обусловливает другое. Например, в приведенном только что высказывании не просто констатируется отсутствие такой ситуации, что курс акций падает, а большинство их владельцев не разоряется, но также указывается на то, что разорение владельцев акций обусловлено фактом падения курса последних.

Материальная импликация широко употребляется в науке. Скажем, в математике признается истинным, что для произвольного числа верно, что если оно кратно 4, то оно кратно 2. А раз это верно для любого числа, то истинными окажутся импликативные высказывания об отдельных числах, например о 8, 6, 5: «Если 8 кратно 4, то 8 кратно 2» (в нем и антецедент, и консеквент истинны), «Если 6 кратно 4, то 6 кратно 2» (в нем антецедент ложен, а консеквент истинен), «Если 5 кратно 4, то 5 кратно 2» (в нем антецедент и консеквент ложны).

Материальная эквиваленция (будем использовать для нее символ «≡») – бинарная связка, образующая из формул **A** и **B** формулу (**A** ≡ **B**). Высказывания вида (**A** ≡ **B**) утверждают, что положения дел, описанные в **A** и **B**, либо одновременно имеют место, либо одновременно отсутствуют. Содержание такого рода высказываний можно выразить иначе: в них утверждается, что при наличии положения дел, описанного в **A**, имеет место также и положение дел, описанное в **B**, и наоборот, при наличии второго положения дел имеет место и первое. Высказывания вида (**A** ≡ **B**) истинны в случаях, когда **A** и **B** одновременно истинны или же одновременно ложны, т. е. когда их значения совпадают. Если же значения **A** и **B** различны, то (**A** ≡ **B**) ложно. Связке «≡» в естественном языке соответствуют по смыслу союзы «если и только если», «тогда и только тогда, когда».

Перечисленные пропозициональные связки имеют одну важную особенность. Значения сложных выражений, образованных с их помощью, зависят только от значений тех выражений, из которых образованы сложные. Иначе говоря, для того чтобы определить, являются ли высказывания вида $\neg$**A**, (**A** & **B**), (**A** $\vee$ **B**), (**A** $\underline{\vee}$ **B**), (**A** $\supset$ **B**), (**A** $\equiv$ **B**) истинными или ложными, необходимо и достаточно знать, какими – истинными или ложными – являются их части **A** и **B**. Действительно, если высказывание **A** истинно, то $\neg$**A** оказывается ложным; если же **A** ложно, то $\neg$**A** будет истинным. Если известно, например, что **A** и **B** одновременно истинны, то высказывания вида (**A** & **B**), (**A** $\vee$ **B**), (**A** $\supset$ **B**), (**A** $\equiv$ **B**) примут значение «истина», а (**A** $\underline{\vee}$ **B**) – значение «ложь».

Таким образом, зная значения **A** и **B**, можно однозначно установить значения выражений, образованных из них с помощью связок $\neg$, &, $\vee$, $\supset$, $\equiv$. Это позволяет рассматривать данные символы как знаки функций особого типа: возможными аргументами и значениями этих функций являются объекты «истина» и «ложь». Такие функции называют *функциями истинности*, а пропозициональные связки, которые служат знаками этих функций, – *истинностно-функциональными*.

Существует бесконечное число функций истинности, хотя для каждого *n* число *n*-местных функций истинности (функций от *n* аргументов) конечно и равно 2^{2^n}. Например, количество одноместных функций – 4, двухместных – 16, трехместных – 256.

Для большинства функций истинности в естественном языке нет выражений, которые бы их представляли. Однако имеется принципиальная возможность ввести свой собственный символ – пропозициональную связку – для любой функции указанного типа в алфавит формализованного языка.

Возникает вопрос, должны ли в алфавите языка логики высказываний содержаться все истинностно-функциональные связки. Оказывается, что необходимость в этом отсутствует. Дело в том, что одни функции истинности могут быть выражены с помощью других. Более того, имеются такие конечные наборы функций, посредством которых выразима любая функция истинности. Эти наборы называют *функционально полными*.

Одной из функционально полных систем является множество функций, представленных связками $\neg$, &, $\vee$ и $\supset$. Покажем, например, каким образом с их помощью можно выразить функции, соответствующие связкам строгой дизъюнкции ($\underline{\vee}$) и эквиваленции ($\equiv$).

Логический смысл высказывания вида ($\mathbf{A} \veebar \mathbf{B}$) можно равносильным образом передать посредством следующего сложного высказывания: (($\mathbf{A}$ & $\neg\mathbf{B}$) $\vee$ ($\neg\mathbf{A}$ & $\mathbf{B}$)). Пользуясь условиями истинности и ложности высказываний, содержащих $\neg$, &, $\vee$, можно убедиться в том, что выражение вида (($\mathbf{A}$ & $\neg\mathbf{B}$) $\vee$ ($\neg\mathbf{A}$ & $\mathbf{B}$)) примет значение «истина» только в двух случаях: 1) когда **A** истинно, а **B** ложно, 2) когда **A** ложно, а **B** истинно. Но в точности в тех же самых случаях истинно и высказывание вида ($\mathbf{A} \veebar \mathbf{B}$). Таким образом, функция истинности, соответствующая строгой дизъюнкции, выразима посредством функций отрицания, конъюнкции и нестрогой дизъюнкции.

Логический смысл высказывания вида ($\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$) равносилен смыслу выражения (($\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$) & ($\mathbf{B} \supset \mathbf{A}$)). Данные выражения принимают значение «истина» в одних и тех же случаях: 1) когда **A** и **B** истинны, 2) когда **A** и **B** ложны. Таким образом, функция эквиваленции выразима посредством функций конъюнкции и импликации.

Следует отметить, что не всякая пропозициональная связка (связка, образующая из некоторого числа формул новую формулу) является истинностно-функциональной. В естественном языке имеются такие сложные высказывания, значения которых не всегда можно установить, зная лишь значения высказываний в их составе. Например, для того, чтобы утверждать, что высказывание «Мэри вышла замуж и родила ребенка» истинно, недостаточно установить истинность высказываний «Мэри вышла замуж» и «Мэри родила ребенка», из которых оно образовано. Необходимо, кроме этого, убедиться в том, что положение дел, описанное в первом из них, предшествовало во времени положению дел, описанному во втором. Следовательно, пропозициональная связка, которая соответствует данному употреблению союза «и» (в смысле «а затем»), не является знаком функции истинности.

К числу истинностно-функциональных не относится также связка, выражающая условную связь между ситуациями (для этой связки используют обычно символ «$\rightarrow$») и называют ее *релевантной* или *номологической импликацией*). Высказывание вида ($\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$) истинно, если положение дел, описываемое в **A**, обусловливает наличие ситуации, описанной в **B**. Высказывание ($\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$) в отличие от ($\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$) может оказаться ложным не только в случае, когда **A** истинно, а **B** ложно. Так, при истинных **A** («3 > 2») и **B** («Волга впадает в Каспийское море») высказывание (**A** → **B**) ложно, хотя в других случаях, когда **A** и **B** истинны, (**A** → **B**) может оказаться и истинным, например, если **A** есть высказывание «Медь – металл», а **B** – «Медь проводит электрический ток».

Еще один тип пропозициональных связок составляют *модальности.* Они выражаются в естественном языке такими оборотами, как «необходимо, что...» (для этой модальности используют обычно символ «□»), «возможно, что…» («◊»), «случайно, что…» («∇») и т. п. Нетрудно убедиться в том, что модальности также не являются знаками функций истинности. Действительно, высказывания вида □**A** могут оказаться как истинными, так и ложными при истинном **A**. Если же **A** ложно, то на основании лишь этого факта нельзя однозначно определить, является ли высказывание ◊**A** истинным или ложным.

Логическая теория, которая будет изложена в данной главе, – классическая логика высказываний – содержит в своем языке в качестве логических символов только истинностно-функциональные связки. Исследование свойств иных видов пропозициональных связок (временных, модальных, релевантной импликации и т. п.) осуществляется в других логических теориях, которые называют *неклассическими логиками.*

§2. Язык классической логики высказываний

Приступим к систематическому построению языка классической логики высказываний. Прежде всего зададим его *алфавит* – совокупность исходных *символов* данного формализованного языка.

Множество *нелогических символов* составляет бесконечный список *пропозициональных переменных* $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{s}$, $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{q_1}$, $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{s_1}$, $\mathbf{p_2}$,… Они, как уже говорилось, используются в качестве параметров простых высказываний при выявлении логических форм контекстов естественного языка.

Логическими символами данного языка являются истинностно-функциональные пропозициональные связки. В качестве исходных могут быть приняты различные наборы связок. Единственное требование, предъявляемое к указанным наборам, – следующее: система функций истинности, представленных этими связками, должна быть функционально полной, т. е. с помощью функций данной системы должна быть выразима любая функция истинности. Договоримся использовать в качестве исходных логических символов связки $\neg$, &, $\vee$, $\supset$.

Техническими символами являются правая и левая круглые скобки –), (. Построение алфавита завершено.

Выражением языка классической логики высказываний будем называть любую последовательность знаков его алфавита.

Некоторые из этих выражений являются *правильно построенными*, а некоторые не являются таковыми. Причем в языке пропозициональной логики имеется только один тип правильно построенных выражений – *формулы*. Точное определение формулы задается следующим образом:

1. **Всякая пропозициональная переменная является формулой.**
2. **Если A – формула, то $\neg$A также является формулой.**
3. **Если A и B – формулы, то выражения (A & B), (A $\vee$ B), (A $\supset$ B) также являются формулами.**
4. **Ничто иное не является формулой.**

Формулы, указанные в пункте 1 данного определения, называют *элементарными*, а в пунктах 2 и 3 – *сложными*.

Пользуясь определением формулы, можно для любого выражения языка в конечное число шагов решить вопрос о том, является оно формулой или нет.

Установим, является ли формулой выражение (**$\neg$p** $\supset$ (**q** & **r**)). Оно имеет вид (**A** $\supset$ **B**), где **A** есть **$\neg$p**, а **B** – (**q** & **r**). Согласно п. 3 определения, (**A** $\supset$ **B**) является формулой, если **A** и **B** формулы. Таким образом, наша задача сводится к решению двух подзадач: являются ли формулами **$\neg$p** и (**q** & **r**). Выражение **$\neg$p** является формулой в соответствии с п. 2, поскольку оно имеет вид **$\neg$C**, где **C** есть **p**, а **p** – формула, согласно п. 1. Выражение (**q** & **r**) также является формулой (в соответствии с п. 3), поскольку оно имеет вид (**D** & **E**), где **D** есть **q**, а **E** есть **r**, которые являются формулами, согласно п. 1. Итак, выражение (**$\neg$p** $\supset$ (**q** & **r**)) – формула.

Является ли формулой выражение (**p** $\neg$ **q**)? Переменные **p** и **q** являются формулами. Следовательно, данное выражение имеет вид

($\mathbf{A} \neg \mathbf{B}$), где **A** и **B** – формулы. Но выражения вида ($\mathbf{A} \neg \mathbf{B}$) не предусмотрены пунктами 1–3, поэтому, согласно п. 4, они не являются формулами.

Формула, входящая в состав некоторой формулы, называется ее *подформулой*. Например, подформулами ($\neg\mathbf{p} \supset (\mathbf{q}\ \&\ \mathbf{r})$) являются **p**, **q**, **r**, $\neg\mathbf{p}$, ($\mathbf{q}\ \&\ \mathbf{r}$), а также сама ($\neg\mathbf{p} \supset (\mathbf{q}\ \&\ \mathbf{r})$), так как, согласно определению подформулы, всякая формула является собственной подформулой.

В сложной формуле всегда можно выделить связку, которая называется ее *главным знаком*. В формулах вида $\neg\mathbf{A}$ главным знаком является первое слева вхождение символа $\neg$. В формулах видов ($\mathbf{A}\ \&\ \mathbf{B}$), ($\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$), ($\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$) главными знаками являются, соответственно, те вхождения символов &, $\vee$, $\supset$, которые стоят между подформулами **A** и **B**. Например, в формуле ($\neg\mathbf{p} \supset (\mathbf{q}\ \&\ \mathbf{r})$) главным является знак $\supset$, в (($\neg\mathbf{p} \supset \mathbf{q})\ \&\ \mathbf{r}$)) – знак &, а в формуле $\neg(\mathbf{p} \supset (\mathbf{q}\ \&\ \mathbf{r}))$ – знак $\neg$.

Для того чтобы записи формул имели более компактный вид, примем *соглашение об опускании скобок*: если первым знаком формулы является левая скобка, а последним – правая, то эту пару скобок договоримся опускать. Тогда формула ($\neg\mathbf{p} \supset (\mathbf{q}\ \&\ \mathbf{r})$) запишется как $\neg\mathbf{p} \supset (\mathbf{q}\ \&\ \mathbf{r})$.

Завершив построение формализованного языка, покажем, каким образом в нем фиксируется логическая форма высказываний естественного языка. Поясним, как осуществляется данная процедура, на примере. Выразим в пропозициональной логике форму сложного высказывания:

«Если спортсмен стал призером соревнований, но не выиграл их, то он занял второе либо третье место».

Прежде всего необходимо выделить простые высказывания, входящие в состав сложного. В нашем примере их четыре:

(1) Спортсмен стал призером соревнований.
(2) Спортсмен выиграл соревнования.
(3) Спортсмен занял второе место.
(4) Спортсмен занял третье место.

Каждому простому высказыванию сопоставляется собственная пропозициональная переменная, например, первому – **p**, второму – **q**, третьему – **r**, четвертому – **s**.

Далее выделяем логические термины, посредством которых простые высказывания сочленяются в сложные: «но», «не», «либо», «если..., то». Теперь необходимо выяснить, какой смысл в данном высказывании выражает каждый логический термин, и сопоставить этому термину связку формализованного языка, имеющую аналогичный смысл. В нашем случае термину «но» по смыслу соответствует конъюнкция (&), термину «не» – отрицание ($\neg$), термину «либо» – дизъюнкция ($\vee$). Что же касается союза «если..., то», то наиболее близкой ему по смыслу является материальная импликация ($\supset$). Однако, как уже говорилось, союз «если..., то» обычно выражает условную связь между положениями дел и не является истинностно-функциональным. Поэтому, заменяя «если..., то» связкой «$\supset$», мы должны помнить, что в указанных случаях она выражает лишь часть логического содержания условного высказывания.

Наконец, необходимо установить порядок и способ сочленения простых высказываний в сложное посредством логических терминов. В нашем высказывании главным является союз «если..., то», значит, его логическая форма должна быть импликативной формулой. Ее антецедент – конъюнктивная формула, первым членом которой будет **p** (этой переменной мы заменяем простое высказывание (1)), а вторым членом – отрицание **q** (этой переменной заменяется высказывание (2)). Итак, антецедент импликации имеет вид $(\mathbf{p} \;\&\; \neg\mathbf{q})$. Ее консеквент – дизъюнктивная формула, членами которой являются переменные **r** и **s** (ими заменяются высказывания (3) и (4)). Итак, консеквент импликации имеет вид $(\mathbf{r} \vee \mathbf{s})$. В целом, логическая форма рассматриваемого высказывания воспроизводится формулой $(\mathbf{p} \;\&\; \neg\mathbf{q}) \supset (\mathbf{r} \vee \mathbf{s})$.

В контекстах естественного языка простые высказывания могут сочленяться с помощью таких логических союзов, которым не соответствует по смыслу никакая пропозициональная связка из алфавита построенного нами языка. Например, высказывание

«Ни днем, ни ночью пограничники не теряют бдительности»

содержит союз «ни…, ни…», у которого нет аналога в системе связок $\{\neg, \&, \vee, \supset\}$. Как же выявляется логическая форма в подобных случаях?

Для этого необходимо переформулировать сложное высказывание таким образом, чтобы оно выражало то же самое утверждение, но содержало при этом только такие союзы, которым соответствуют по смыслу какие-либо связки из алфавита. Например, приведенное выше высказывание можно, не изменяя его содержания, переформулировать так:

> «Неверно, что днем пограничники теряют бдительность, и неверно, что ночью пограничники теряют бдительность».

Логическая форма высказывания имеет вид $(\neg \mathbf{p} \ \& \ \neg \mathbf{q})$, где **p** стоит вместо предложения «Днем пограничники теряют бдительность», а **q** – вместо «Ночью пограничники теряют бдительность».

Пропозициональная связка, адекватная по смыслу союзу «ни..., ни...» естественного языка, может быть введена в язык классической пропозициональной логики посредством определения через исходные связки алфавита. Выражение вида «Ни **A**, ни **B**» содержит утверждение об отсутствии обеих ситуаций – описанной в **A** и описанной в **B**. Логическое содержание этого утверждения выразимо с помощью связок $\neg$ и & следующим образом: $(\neg \mathbf{A} \ \& \ \neg \mathbf{B})$. Поэтому в формализованный язык можно ввести аналогичный союзу «ни..., ни...» символ, например, «$\downarrow$», приняв следующее определение:

$$(\mathbf{A} \downarrow \mathbf{B}) \equiv_{\mathrm{Df}} (\neg \mathbf{A} \ \& \ \neg \mathbf{B}),$$

где знак «$\equiv_{\mathrm{Df}}$» означает «равносильно по определению», а саму связку «$\downarrow$» называют *знаком Нико*.

Подобным же образом (т. е. посредством определения через элементы множества $\{\neg, \&, \vee, \supset\}$) можно ввести в язык классической логики высказываний любую связку, являющуюся знаком функции истинности. Например, определения строгой дизъюнкции ($\veebar$) и эквиваленции ($\equiv$) имеют следующий вид:

$$(\mathbf{A} \veebar \mathbf{B}) \equiv_{\mathrm{Df}} (\mathbf{A} \ \& \ \neg \mathbf{B}) \vee (\neg \mathbf{A} \ \& \ \mathbf{B}),$$
$$(\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}) \equiv_{\mathrm{Df}} (\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \ \& \ (\mathbf{B} \supset \mathbf{A}).$$

Нетрудно убедиться в том, что правые части этих определений имеют то же логическое содержание, что и их левые части.

Приняв в языке пропозициональной логики указанные определения, мы можем использовать в нем выражения вида $(\mathbf{A} \downarrow \mathbf{B})$, $(\mathbf{A} \veebar \mathbf{B})$, $(\mathbf{A} \equiv \mathbf{B})$, но эти выражения должны рассматриваться как сокращения для формул $(\neg \mathbf{A} \ \& \ \neg \mathbf{B})$, $(\mathbf{A} \ \& \ \neg \mathbf{B}) \vee (\neg \mathbf{A} \ \& \ \mathbf{B})$, $(\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \ \& \ (\mathbf{B} \supset \mathbf{A})$

соответственно. Применяя эти определения, мы можем устранить связки $\downarrow$, $\veebar$ и $\equiv$. Выявим, например, логическую формулу высказывания:

«Треугольник не является прямоугольным, если и только если верно одно из двух: он либо остроугольный, либо тупоугольный».

Заменим простое высказывание «Треугольник является прямоугольным» параметром **p**, «Он остроугольный» – параметром **q**, «Он тупоугольный» – **r**. Термину «не» соответствует по смыслу связка «$\neg$», термину «если и только если» – связка «$\equiv$», а термину «либо..., либо» – связка «$\veebar$». Поэтому логическую форму данного высказывания можно представить так: $\neg\mathbf{p} \equiv (\mathbf{q} \veebar \mathbf{r})$. Покажем, каким образом можно устранить символы «$\equiv$» и «$\veebar$» из выражения. Согласно определению эквиваленции, данное выражение равносильно конъюнктивной формуле $(\neg\mathbf{p} \supset (\mathbf{q} \veebar \mathbf{r})) \mathbin{\&} ((\mathbf{q} \veebar \mathbf{r}) \supset \neg\mathbf{p})$. Далее заменяем вхождения $(\mathbf{q} \veebar \mathbf{r})$ на $((\mathbf{q} \mathbin{\&} \neg\mathbf{r}) \vee (\neg\mathbf{q} \mathbin{\&} \mathbf{r}))$, согласно определению строгой дизъюнкции. В итоге получаем формулу:

$$(\neg\mathbf{p} \supset ((\mathbf{q} \mathbin{\&} \neg\mathbf{r}) \vee (\neg\mathbf{q} \mathbin{\&} \mathbf{r}))) \mathbin{\&} (((\mathbf{q} \mathbin{\&} \neg\mathbf{r}) \vee (\neg\mathbf{q} \mathbin{\&} \mathbf{r})) \supset \neg\mathbf{p}),$$

которая воспроизводит логическую форму анализируемого высказывания в языке с исходными связками $\neg$, $\&$, $\vee$, $\supset$.

Задав язык классической логики высказываний, приступим к построению в его рамках самой логической теории – *классической логики высказываний*. При этом будем использовать метод, получивший название *метода таблиц истинности*.

§3. Таблицы истинности. Тождественно-истинные, тождественно-ложные, выполнимые и опровержимые формулы

Как и всякая логическая теория, логика высказываний решает две основные задачи: во-первых, выделяет среди класса формул множество своих законов и, во вторых, устанавливает логические отношения (прежде всего – отношение логического следования) между формулами формализованного языка.

Напомним, что законом логической теории является формула, которая принимает значение «истина» при любой допустимой в данной теории интерпретации нелогических символов, входящих в ее состав. Поэтому построение логики высказываний следует начать с вопроса о том, каким образом могут интерпретироваться нелогические символы ее языка, т. е. пропозициональные переменные (это единственный тип нелогических символов в языке пропозициональной логики).

Интерпретация пропозициональных переменных. Нелогические символы формализованных языков, как уже говорилось, являются параметрами некоторых выражений естественного языка. В частности, пропозициональные переменные – параметры простых высказываний.

Процедура интерпретации нелогических символов состоит в приписывании им значений. Тип значения каждого такого символа должен быть тем же самым, что и у соответствующих выражений естественного языка (т. е. выражений, параметрами которых данные символы являются).

Поскольку каждое простое высказывание либо истинно, либо ложно, то их параметрам – пропозициональным переменным – могут приписываться в качестве значений только «истина» или «ложь». Итак, существует две допустимых интерпретации каждой отдельно взятой пропозициональной переменной: 1) интерпретация, сопоставляющая ей значение «истина», 2) интерпретация, сопоставляющая ей значение «ложь».

Понятие интерпретации пропозициональных переменных можно распространить на случай, когда значения приписываются не одной, а некоторому числу n различных пропозициональных переменных, например $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2,..., \mathbf{p}_n$.

Допустимой интерпретацией переменных $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2,..., \mathbf{p}_n$ является произвольный *набор их значений*, т. е. любая последовательность $<\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n>$, где каждое α_i есть либо «истина» (сокращенно *и*), либо «ложь» (сокращенно *л*), причем α_i есть значение переменной $\mathbf{p}_i$.

Если последовательность $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2,..., \mathbf{p}_n$ состоит из одной переменной (т. е. если $n = 1$), то существует два набора значений: <*и*> и <*л*>. Компоненты этих одночленных последовательностей являются значениями $\mathbf{p}_1$ при двух различных ее интерпретациях.

Если данная последовательность содержит две переменные (если $n = 2$), то наборами значений являются пары (всего их четыре):

<*и*, *и*>, <*и*, *л*>, <*л*, *и*> и <*л*, *л*>.

Первая компонента пары указывает на значение $\mathbf{p}_1$, а вторая – на значение $\mathbf{p}_2$ при данной интерпретации.

Если последовательность содержит три переменные, то наборами значений будут тройки (всего их восемь):

<*и, и, и*>, <*и, и, л*>, <*и, л, и*>, <*и, л, л*>,
<*л, и, и*>, <*л, и, л*>, <*л, л, и*>, <*л, л, л*>.

Первая компонента тройки указывает на значение p_1, вторая – на значение p_2, третья – на значение p_3 при данной интерпретации.

Допустимые интерпретации переменных $p_1, p_2, \ldots, p_n$ могут быть представлены в виде таблицы: строчкам соответствуют различные интерпретации (наборы значений) этих переменных, а в столбцах записываются значения переменных при соответствующей интерпретации. Наборы значений удобно располагать в лексикографическом (алфавитном) порядке (как располагают слова в словаре). Составим подобные таблицы для одной, двух и трех переменных.

	p_1
1	*и*
2	*л*

	p_1, p_2	
1	*и*	*и*
2	*и*	*л*
3	*л*	*и*
4	*л*	*л*

	p_1, p_2, p_3		
1	*и*	*и*	*и*
2	*и*	*и*	*л*
3	*и*	*л*	*и*
4	*и*	*л*	*л*
5	*л*	*и*	*и*
6	*л*	*и*	*л*
7	*л*	*л*	*и*
8	*л*	*л*	*л*

Число всех возможных наборов значений n переменных равно 2^n. Например, число допустимых интерпретаций четырех переменных равно 16, пяти – 32 и т. д.

Табличные определения пропозициональных связок. Следующий этап построения логической теории состоит в придании точных значений логическим символам алфавита. Напомним, что в нашем формализованном языке исходными логическими символами являются пропозициональные связки $\neg$, &, $\vee$, $\supset$. Эти связки, как уже говорилось, можно рассматривать как знаки *функций истинности* – функций, аргументами и значениями которых являются «истина» и «ложь».

Придать значение пропозициональной связке **(в классической логике высказываний) – означает сопоставить ей определенную функцию истинности.**

Какие же функции следует сопоставить пропозициональным связкам $\neg$, &, $\vee$, $\supset$? Для ответа на этот вопрос необходимо вспомнить, какое логическое содержание имеют высказывательные формы **¬A**, **A & B**, **A ∨ B**, **A ⊃ B**, при каких условиях они истинны, а при каких – ложны. Эта проблема подробно рассматривалась в §1 данной главы.

Высказывание формы **¬A** принимает значение «истина» в том случае, когда **A** ложно; если же **A** истинно, то **¬A** принимает значение «ложь». Сказанное можно выразить посредством следующей таблицы:

A	**¬A**
и	*л*
л	*и*

В первом столбце указаны возможные значения формулы **A** (*и* и *л*), а во втором – значения, которые примет формула **¬A** в соответствующих случаях. Данную таблицу можно рассматривать как определение функции истинности, представленной знаком отрицания. Эта функция объекту ***и*** сопоставляет объект *л*, а объекту *л* – объект ***и***.

Высказывание формы **A & B** истинно, если оба высказывания – и **A**, и **B** – истинны. Если же хотя бы одно из них ложно, то **A & B** примет значение «ложь». Выразим условия истинности и ложности конъюнктивных формул в таблице:

A	**B**	**A & B**
и	*и*	*и*
и	*л*	*л*
л	*и*	*л*
л	*л*	*л*

В первых двух столбцах указаны все возможные наборы значений формул **A** и **B**, а в третьем – значения, которые примет формула **A & B** в соответствующих случаях. Данная таблица определяет функцию истинности, представленную знаком конъюнкции, следующим образом: паре <***и***, ***и***> эта функция сопоставляет объект ***и***, а парам <***и***, *л*>, <*л*, ***и***> и <*л*, *л*> – объект *л*.

Высказывание формы $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ истинно, если по крайней мере одно из двух высказываний – **A** или **B** – является истинным. Если же оба они ложны, то $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ примет значение «ложь». Исходя из этих условий истинности и ложности формул вида $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$, зададим табличное определение нестрогой дизъюнкции:

A	**B**	$\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$
и	*и*	*и*
и	*л*	*и*
л	*и*	*и*
л	*л*	*л*

Высказывание формы $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ ложно, если **A** истинно, а **B** ложно. В противном случае, т. е. когда **A** ложно или **B** истинно, $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ примет значение «истина». Табличное определение импликации может быть представлено следующей таблицей:

A	**B**	$\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$
и	*и*	*и*
и	*л*	*л*
л	*и*	*и*
л	*л*	*и*

Алгоритм построения таблиц истинности. Зададим теперь алгоритм решения вопроса, при каких интерпретациях пропозициональных переменных произвольная формула языка принимает значение «истина», а при каких – значение «ложь». Иначе говоря, предложим метод, позволяющий вычислять значение любой формулы при каждом наборе значений входящих в нее переменных. Чтобы решить указанную задачу, для данной формулы **A** конструируется *таблица истинности.* Ее построение осуществляется следующим образом:

1) Прежде всего выделяются все различные пропозициональные переменные, входящие в состав **A**;
2) В столбик выписываются все возможные наборы значений этих переменных;
3) В составе формулы **A** выделяются все подформулы (начиная от элементарных и кончая самой формулой **A**);

4) Вычисляется значение каждой подформулы при каждом наборе значений переменных.

Значения элементарных подформул – пропозициональных переменных – уже заданы пунктом 2. При вычислении значений сложных подформул используются табличные определения связок $\neg$, &, $\vee$ и $\supset$. Причем сначала определяются значения подформул, содержащих одну пропозициональную связку, затем значения подформул, содержащих две пропозициональные связки, и т. д. Наконец вычисляется значение подформулы с максимальным числом связок, т. е. самой формулы **A**.

Построим в качестве примера таблицу истинности для формулы **(p $\supset$ ¬p) & (¬p $\supset$ p)**. В составе этой формулы содержится одна пропозициональная переменная – **p**. Имеется два набора значений **p**: <*и*> и <*л*>. Подформулами данной формулы являются **p**, **¬p**, **(p $\supset$ ¬p)**, **(¬p $\supset$ p)** и, наконец, сама формула **(p $\supset$ ¬p) & (¬p $\supset$ p)**. Строим таблицу истинности согласно вышеописанному алгоритму:

p	¬p	(p $\supset$ ¬p)	(¬p $\supset$ p)	(p $\supset$ ¬p) & (¬p $\supset$ p)
и	*л*	*л*	*и*	*л*
л	*и*	*и*	*л*	*л*

В первом столбце таблицы указаны все допустимые интерпретации **p** – единственной переменной в нашей формуле. Значения **¬p** определяются построчно исходя из значений **p** по определению отрицания. Значения **(p $\supset$ ¬p)** устанавливаются по определению импликации исходя из значений **p** и **¬p** в каждой из строчек: в первой строке антецедент **p** истинен, а консеквент **¬p** ложен, поэтому **(p $\supset$ ¬p)** получает значение *л*, а во второй – антецедент ложен, а консеквент истинен, поэтому **(p $\supset$ ¬p)** принимает значение ***и***. Значения **(¬p $\supset$ p)** устанавливаются исходя из значений антецедента **¬p** и консеквента **p**: в первой строке антецедент ложен, а консеквент истинен, поэтому **(¬p $\supset$ p)** примет значение *и*; во второй строке антецедент истинен, а консеквент ложен, поэтому **(¬p $\supset$ p)** примет значение *л*. Значение всей формулы **(p $\supset$ ¬p) & (¬p $\supset$ p)** вычисляется исходя из значений **(p $\supset$ ¬p)** и **(¬p $\supset$ p)** по определению конъюнкции: в первой строке первый член конъюнкции ложен, а во второй ложен второй ее член, значит, в обеих строках формула **(p $\supset$ ¬p) & (¬p $\supset$ p)** примет значение *л*.

Таблица для формулы **A** может быть построена более компактным образом: выписываются отдельно лишь пропозициональные переменные (элементарные подформулы) формулы **A** (для них задаются все возможные наборы значений), значения же сложных подформул указываются под их главными знаками в составе формулы **A**. Значения самой формулы **A** указываются под ее главным знаком, и данный столбец таблицы называется *результирующим*. Таблица для формулы $(\mathbf{p} \supset \neg\mathbf{p})$ & $(\neg\mathbf{p} \supset \mathbf{p})$ в таком, более компактном виде выглядит следующим образом:

p	(p ⊃	¬p)	&	(¬p	⊃ p)
и	*л*	*л*	*л*	*л*	*и*
л	*и*	*и*	*л*	*и*	*л*
1	4	2	6	3	5

В столбце (1) указаны возможные интерпретации переменной **p**, в столбцах (2) и (3) – значения, которые при этих интерпретациях принимает формула ¬**p**, в столбце (4) – значения $(\mathbf{p} \supset \neg\mathbf{p})$, в столбце (5) – значения $(\neg\mathbf{p} \supset \mathbf{p})$. Значения всей формулы $(\mathbf{p} \supset \neg\mathbf{p})$ & $(\neg\mathbf{p} \supset \mathbf{p})$ указаны в столбце (6), который и является результирующим.

Построим таблицу для формулы $\neg(\mathbf{p}$ & $\mathbf{q}) \supset (\neg\mathbf{p} \vee \neg\mathbf{q})$, которая содержит две пропозициональные переменные.

p	q	¬(p	& q)	⊃	(¬p	∨	¬q)
и	*и*	*л*	*и*	*и*	*л*	*л*	*л*
и	*л*	*и*	*л*	*и*	*л*	*и*	*и*
л	*и*	*и*	*л*	*и*	*и*	*и*	*л*
л	*л*	*и*	*л*	*и*	*и*	*и*	*и*
1	2	6	3	8	4	7	5

В столбцах (1) и (2) заданы все возможные наборы значений переменных **p** и **q**. Столбец (3), указывающий значения в каждом из этих наборов формулы (**p** & **q**), построен с использованием (1) и (2) по определению конъюнкции. Столбец (4) со значениями формулы ¬**p** и столбец (5) со значениями ¬**q** построены, соответственно, на основе (1) и (2) по определению отрицания. Столбец (6) со значениями формулы ¬(**p** & **q**) построен на основе (3) по определению отрицания. Столбец (7) со значениями формулы $(\neg\mathbf{p} \vee \neg\mathbf{q})$ построен на основе (4) и (5) по определению дизъюнкции. Наконец, результирующий столбец (8) построен с использованием (6) и (7) по определению импликации. Таким образом, при любых наборах значений переменных **p** и **q** формула $\neg(\mathbf{p} \,\&\, \mathbf{q}) \supset (\neg\mathbf{p} \vee \neg\mathbf{q})$ принимает значение «истина».

Завершим данную серию примеров построением таблицы истинности для формулы $\neg((\mathbf{p} \,\&\, \neg\mathbf{q}) \vee (\mathbf{q} \supset \mathbf{r}))$, содержащей три переменные. Число возможных интерпретаций трех переменных равно 2^3, поэтому в таблице для указанной формулы будет восемь строк.

p	q	r	¬((p	&	¬q)	∨ (q	⊃ r))
и	*и*	*и*	*л*	*л*	*л*	*и*	*и*
и	*и*	*л*	*и*	*л*	*л*	*л*	*л*
и	*л*	*и*	*л*	*и*	*и*	*и*	*и*
и	*л*	*л*	*л*	*и*	*и*	*и*	*и*
л	*и*	*и*	*л*	*л*	*л*	*и*	*и*
л	*и*	*л*	*и*	*л*	*л*	*л*	*л*
л	*л*	*и*	*л*	*л*	*и*	*и*	*и*
л	*л*	*л*	*л*	*л*	*и*	*и*	*и*

Главным знаком рассматриваемой формулы является первое вхождение символа «¬». Результирующий столбец таблицы расположен под этим знаком. Формула $\neg((\mathbf{p} \,\&\, \neg\mathbf{q}) \vee (\mathbf{q} \supset \mathbf{r}))$ принимает значение «истина» в следующих случаях: 1) когда **p** и **q** истинны, а **r** – ложно (вторая строка) и 2) когда **p** и **r** ложны, а **q** – истинно (шестая строка). При всех остальных интерпретациях **p**, **q**, **r** формула примет значение «ложь».

Законы классической логики высказываний. Используя метод построения таблиц истинности, можно эффективно решать вопрос о том, является ли какая-либо формула языка классической пропозициональной логики законом этой теории. Напомним, что законом некоторой логической теории называется формула, принимающая значение «истина» при любых интерпретациях (допустимых в этой теории) нелогических символов, входящих в состав данной формулы. Применительно к логике высказываний это понятие теперь может быть конкретизировано следующим образом:

Законом классической логики высказываний **является формула, принимающая значение «истина» при любых наборах значений входящих в нее пропозициональных переменных.**

Формулы данного типа называют *тождественно-истинными*, или *общезначимыми*. В результирующем столбце таблицы для тождественно-истинной (общезначимой) формулы в каждой строке имеем ***и***. Примером тождественно-истинной формулы является $\neg(\mathbf{p} \ \& \ \mathbf{q}) \supset (\neg\mathbf{p} \lor \neg\mathbf{q})$, таблица которой построена выше. Утверждение «Формула **A** является тождественно-истинной» будем записывать сокращенно в метаязыке следующим образом: «$\models \mathbf{A}$».

Помимо множества тождественно-истинных формул полезно также выделить еще три класса формул языка классической логики высказываний: класс *тождественно-ложных*, класс *выполнимых* и класс *опровержимых* формул.

Формула называется *тождественно-ложной*, если и только если она принимает значение «ложь» при любых наборах значений входящих в нее пропозициональных переменных.

Примером такой формулы является $(\mathbf{p} \supset \neg\mathbf{p}) \ \& \ (\neg\mathbf{p} \supset \mathbf{p})$.

Формула называется *выполнимой*, если и только если она принимает значение «истина» по крайней мере при одном наборе значений входящих в нее пропозициональных переменных.

Примером выполнимой формулы является $\neg((\mathbf{p} \ \& \ \neg\mathbf{q}) \lor (\mathbf{q} \supset \mathbf{r}))$.

Из последнего определения следует, что всякая тождественно-истинная формула является выполнимой, поскольку существует набор значений, при котором она принимает значение «истина». Поэтому тождественно-истинная формула $\neg(\mathbf{p} \ \& \ \mathbf{q}) \supset (\neg\mathbf{p} \lor \neg\mathbf{q})$ относится также и к классу выполнимых.

Формула называется *опровержимой*, если и только если она принимает значение «ложь» по крайней мере при одном наборе значений входящих в нее пропозициональных переменных.

Формула $\neg((\mathbf{p} \ \& \ \neg\mathbf{q}) \lor (\mathbf{q} \supset \mathbf{r}))$ представляет собой не только выполнимую, но и опровержимую формулу. Кроме того, к числу опровержимых, как явствует из приведенного определения, следует относить все тождественно-ложные формулы, в том числе и формулу $(\mathbf{p} \supset \neg\mathbf{p}) \ \& \ (\neg\mathbf{p} \supset \mathbf{p})$.

Теперь средствами классической пропозициональной логики можно установить, является ли произвольное высказывание естественного языка логически истинным, логически ложным или логически недетерминированным (соответствующие определения даны в §3 главы I). Для этого необходимо воспроизвести логическую форму данного высказывания в языке пропозициональной логики и построить таблицу истинности для полученной формулы. Если во всех строках таблицы формула примет значение «истина», то исходное высказывание *логически истинно* относительно данной теории. Если во всех строках формула примет значение «ложь», то высказывание *логически ложно*. Если же формула окажется и выполнимой, и опровержимой, т. е. в одних строках таблицы примет значение «истина», а в других – значение «ложь», то высказывание *логически недетерминировано* относительно классической логики высказываний.

Например, высказывание «Если неверно, что Иванов знает английский и французский языки, то он не знает английского или не знает французского языка» имеет форму $\neg(\mathbf{p} \,\&\, \mathbf{q}) \supset (\neg\mathbf{p} \vee \neg\mathbf{q})$, где $\mathbf{p}$ подставлена вместо высказывания «Иванов знает английский язык», а $\mathbf{q}$ – вместо «Иванов знает французский язык». Ранее было установлено, что эта формула является тождественно-истинной. Поэтому рассматриваемое высказывание логически истинно.

В завершение этого параграфа дадим табличные определения эквиваленции ($\equiv$), строгой дизъюнкции ($\underline{\vee}$) и знака Нико ($\downarrow$), которые не входят в число исходных пропозициональных связок языка. В предыдущем параграфе отмечалось, что выражение $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ является сокращением для формулы $(\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \,\&\, (\mathbf{B} \supset \mathbf{A})$, выражение $\mathbf{A} \,\underline{\vee}\, \mathbf{B}$ – сокращением для $(\mathbf{A} \,\&\, \neg\mathbf{B}) \vee (\neg\mathbf{A} \,\&\, \mathbf{B})$, а выражение $\mathbf{A} \downarrow \mathbf{B}$ – сокращением для $\neg\mathbf{A} \,\&\, \neg\mathbf{B}$. Поэтому, чтобы выяснить условия истинности и ложности этих связок, необходимо построить таблицы для формул $(\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \,\&\, (\mathbf{B} \supset \mathbf{A})$, $(\mathbf{A} \,\&\, \neg\mathbf{B}) \vee (\neg\mathbf{A} \,\&\, \mathbf{B})$ и $\neg\mathbf{A} \,\&\, \neg\mathbf{B}$.

A	**B**	**(A ⊃ B)**	**&**	**(B ⊃ A)**	**(A**	**&**	**¬B)**	**∨**	**(¬A**	**&**	**B)**	**¬A**	**&**	**¬B**
и	*и*	*и*	*и*	*и*		*л*	*л*	*л*	*л*	*л*		*л*	*л*	*л*
и	*л*	*л*	*л*	*и*		*и*	*и*	*и*	*л*	*л*		*л*	*л*	*и*
л	*и*	*и*	*л*	*л*		*л*	*л*	*и*	*и*	*и*		*и*	*л*	*л*
л	*л*	*и*	*и*	*и*		*л*	*и*	*л*	*и*	*л*		*и*	*и*	*и*

Перенесем теперь результирующие столбцы под выражения **A ≡ B**, **A $\veebar$ B**, **A ↓ B**. В итоге получим табличные определения пропозициональных связок ≡, $\veebar$ и ↓:

A	**B**	**A ≡ B**	**A $\veebar$ B**	**A ↓ B**
и	*и*	*и*	*л*	*л*
и	*л*	*л*	*и*	*л*
л	*и*	*л*	*и*	*л*
л	*л*	*и*	*л*	*и*

§4. Логические отношения между формулами

Наряду с выделением класса логических законов в рамках логических теорий решается еще одна задача – устанавливаются *логические отношения* (отношения по истинности и ложности) между формулами.

Ниже выделяются различные типы отношений между формулами не только в рамках классической логики высказываний, но и в любой другой логической теории. Следует также иметь в виду, что данные логические отношения имеют место и между высказываниями естественного языка. Решить вопрос о наличии того или иного отношения между высказываниями можно лишь средствами конкретной логической теории на основе анализа их логических форм, зафиксированных в языке этой теории.

Чтобы установить отношения между формулами в некоторой логической теории, необходимо учесть их возможные совместные значения при различных, допустимых в данной теории интерпретациях нелогических символов. Иначе говоря, требуется определить, какие значения могут, а какие не могут принять эти формулы при одной и той же интерпретации входящих в их состав нелогических символов.

В качестве *фундаментальных* логических отношений выделим отношения *совместимости по истинности*, *совместимости по ложности* и *логического следования*.

Формулы из множества Г называются *совместимыми по истинности* в некоторой логической теории T, если и только если в T существует интерпретация нелогических

символов, входящих в указанные формулы, при которой каждая формула из Г принимает значение «истина».

В противном случае (т. е. когда не существует интерпретации, при которой формулы из **Г** одновременно истинны) указанные формулы *несовместимы по истинности.*

Формулы из множества Г называются *совместимыми по ложности* в теории Т, если и только если в Т существует интерпретация нелогических символов, входящих в указанные формулы, при которой каждая формула из Г принимает значение «ложь».

В противном случае (т. е. когда не существует интерпретации, при которой формулы из **Г** одновременно ложны) указанные формулы *несовместимы по ложности.*

Наибольшую важность представляет отношение логического следования, о котором уже шла речь ранее (см. §2 главы I). Введем соответствующее понятие более строгим образом.

***Из множества формул* Г *логически следует формула* В в некоторой логической теории Т, если и только если в Т не существует интерпретации нелогических символов, входящих в Г и в В, при которой каждая формула из Г принимает значение «истина», а формула В – принимает значение «ложь».**

В противном случае (т. е. когда существует интерпретация, при которой формулы из **Г** одновременно истинны, а **В** – ложна) формула **В** *не следует логически* из **Г**. Утверждение «Из множества формул **Г** логически следует формула **В**» записывают сокращенно в метаязыке следующим образом: «**Г** ⊨ **В**».

Определение логического следования можно эквивалентным образом переформулировать так:

Г ⊨ В в некоторой логической теории Т, если и только если в Т при всякой интерпретации нелогических символов, при которой каждая формула из Г принимает значение «истина», формула В также примет значение «истина».

Итак, мы сформулировали определения основных логических отношений между формулами. Как же теперь практически можно установить эти отношения в рамках логики высказываний? В этой теории имеется *эффективная процедура*, позволяющая выяснять, являются ли формулы некоторого множества **Г** совместимыми по истинности, совместимыми по ложности, следует ли из них произвольная формула **B** в случаях, когда **Г** содержит *конечное* число формул.

Установить отношения между конечным числом формул можно предварительно построив для них *совместную таблицу истинности.*

Алгоритм построения совместной таблицы для нескольких формул несложен. Прежде всего необходимо выделить различные пропозициональные переменные, которые входят в состав по крайней мере одной из этих формул. Затем следует задать все возможные наборы значений выделенных переменных (записав их в столбик в таблице). Затем описанным ранее способом вычисляют значения каждой из формул на каждом из заданных наборов.

Построим в качестве примера совместную таблицу для формул $\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$, $\mathbf{q} \supset \mathbf{r}$ и $\mathbf{p} \vee \mathbf{r}$. Составим список различных переменных, входящих хотя бы в одну из этих формул: **p**, **q**, **r**. Зададим все возможные наборы значений трех переменных (их число равно 8) и вычислим значения на этих наборах формул $\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$, $\mathbf{q} \supset \mathbf{r}$ и $\mathbf{p} \vee \mathbf{r}$. В результате получим следующую таблицу:

p q r	$\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$	$\mathbf{q} \supset \mathbf{r}$	$\mathbf{p} \vee \mathbf{r}$
и и и	*и*	*и*	*и*
и и л	*и*	*л*	*и*
и л и	*и*	*и*	*и*
и л л	*и*	*и*	*и*
л и и	*и*	*и*	*и*
л и л	*и*	*л*	*л*
л л и	*л*	*и*	*и*
л л л	*л*	*и*	*л*

Построив совместную таблицу для формул, приступают к установлению логических отношений между ними. При этом используют те критерии совместимости по истинности, совместимости по ложности и логического следования, которые соответствуют сформулированным выше определениям указанных отношений.

Если в совместной таблице найдется по крайней мере одна строка, в которой каждая формула принимает значение ***и***, то данные формулы *совместимы по истинности.* Если же строка, в которой формулы одновременно истинны, отсутствует, то они *несовместимы по истинности.*

Если в совместной таблице найдется по крайней мере одна строка, в которой каждая формула принимает значение *л*, то они *совместимы по ложности.* Если же строка, в которой формулы одновременно ложны, отсутствует, то они *несовместимы по ложности.*

Предположим, что нам необходимо выяснить, следует ли логически из формул $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2,.., \mathbf{A}_n$ формула **B**. Строим совместную таблицу для формул $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2,.., \mathbf{A}_n$ и **B**. Если в данной таблице отсутствует строка, в которой формулы $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2,.., \mathbf{A}_n$ одновременно истинны, а формула **B** ложна, то $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2,.., \mathbf{A}_n \models \mathbf{B}$. Если же такая строка имеется, то **B** *не следует логически* из $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2,.., \mathbf{A}_n$.

Установим логические отношения между формулами $\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$, $\mathbf{q} \supset \mathbf{r}$ и $\mathbf{p} \vee \mathbf{r}$. Для этого обратимся к совместной для них таблице, которая построена нами ранее. Формулы $\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$, $\mathbf{q} \supset \mathbf{r}$, $\mathbf{p} \vee \mathbf{r}$ совместимы по истинности, поскольку в совместной таблице имеется строка – например, первая, – в которой каждая из них принимает значение ***и***. Указанные формулы несовместимы по ложности, поскольку в таблице отсутствует строка, в которой они были бы одновременно ложными.

Формула $\mathbf{p} \vee \mathbf{r}$ логически следует из формул $\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$ и $\mathbf{q} \supset \mathbf{r}$, т. е. $\mathbf{p} \vee \mathbf{q}, \mathbf{q} \supset \mathbf{r} \models \mathbf{p} \vee \mathbf{r}$, поскольку в совместной таблице нет строки, в которой $\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$ и $\mathbf{q} \supset \mathbf{r}$ принимают значение ***и***, а $\mathbf{p} \vee \mathbf{r}$ – значение *л*. Вместе с тем, формула $\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$ не следует логически из $\mathbf{q} \supset \mathbf{r}$ и $\mathbf{p} \vee \mathbf{r}$, поскольку в таблице имеется строка – а именно седьмая, – в которой $\mathbf{q} \supset \mathbf{r}$ и $\mathbf{p} \vee \mathbf{r}$ истинны, а $\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$ ложна. Формула $\mathbf{q} \supset \mathbf{r}$ тоже не следует из $\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$ и $\mathbf{p} \vee \mathbf{r}$, об этом свидетельствует вторая строка совместной таблицы.

Метод таблиц истинности может быть использован для проверки умозаключений, осуществляемых в естественном языке. Для того чтобы проверить умозаключение средствами классической логики высказываний, необходимо выразить в языке этой теории логическую форму его посылок и заключения. Далее следует построить совместную таблицу истинности для полученных формул и с ее помощью решить вопрос, следует ли логическая форма заключения из логических форм посылок. При утвердительном ответе рассматриваемое умозаключение правильно, при отрицательном – неправильно. В качестве примера проверим следующее умозаключение:

«Если данное тело движется равномерно и прямолинейно, то на него не действуют силы. Данное тело движется равномерно, но не прямолинейно. Следовательно, на него действуют силы».

Заменив переменной **p** простое высказывание «Данное тело движется равномерно», переменной **q** – «Данное тело движется прямолинейно», переменной **r** – «На данное тело действуют силы», получаем логическую форму этого умозаключения:

$$\frac{\begin{array}{c}(\mathbf{p} \,\&\, \mathbf{q}) \supset \neg\mathbf{r} \\ \mathbf{p} \,\&\, \neg\mathbf{q}\end{array}}{\mathbf{r}.}$$

Строим совместную таблицу для рассматриваемых формул $(\mathbf{p} \,\&\, \mathbf{q}) \supset \neg\mathbf{r}$, $\mathbf{p} \,\&\, \neg\mathbf{q}$ и **r**.

p q r	(p & q) ⊃ ¬r	p & ¬q	r
и и и	*л*	*л*	*и*
и и л	*и*	*л*	*л*
и л и	*и*	*и*	*и*
и л л	*и*	*и*	*л*
л и и	*и*	*л*	*и*
л и л	*и*	*л*	*л*
л л и	*и*	*л*	*и*
л л л	*и*	*л*	*л*

В четвертой строке первые две формулы истинны, а третья ложна, поэтому из $(\mathbf{p} \,\&\, \mathbf{q}) \supset \neg\mathbf{r}$ и $\mathbf{p} \,\&\, \neg\mathbf{q}$ не следует логически **r**. Следовательно, рассматриваемое умозаключение является неправильным.

Метод таблиц истинности позволяет решать и другие содержательные задачи, связанные с установлением логических отношений между высказываниями естественного языка на основе анализа их форм. Рассмотрим пример.

В ходе расследования дела об ограблении банка были получены показания трех свидетелей.

Показания первого из них таковы: «Либо Джонс, либо Браун (но не оба вместе) замешаны в преступлении».
Показания второго свидетеля: «Если Браун замешан в преступлении, то Смит не мог участвовать в нем».
Показания третьего свидетеля: «Джонс не замешан в преступлении, его совершил Смит».
Спрашивается: могут ли показания всех трех свидетелей быть правдивыми, и могут ли они одновременно оказаться ошибочными?

Прежде всего, выявляем логическую форму показаний свидетелей. Показания первого из них имеют вид $\mathbf{p} \veebar \mathbf{q}$, второго – $\mathbf{q} \supset \neg\mathbf{r}$, третьего – $\neg\mathbf{p} \mathbin{\&} \mathbf{r}$, где $\mathbf{p}$ подставлена вместо высказывания «Джонс замешан в преступлении», $\mathbf{q}$ – вместо «Браун замешан в преступлении», $\mathbf{r}$ – вместо «Смит замешан в преступлении».

Для ответа на поставленные вопросы необходимо выяснить, совместимы ли по истинности и совместимы ли по ложности рассматриваемые формулы $\mathbf{p} \veebar \mathbf{q}$, $\mathbf{q} \supset \neg\mathbf{r}$ и $\neg\mathbf{p} \mathbin{\&} \mathbf{r}$. Строим для этих формул совместную таблицу:

p q r	$\mathbf{p} \veebar \mathbf{q}$	$\mathbf{q} \supset \neg\mathbf{r}$	$\neg\mathbf{p} \mathbin{\&} \mathbf{r}$
и и и	*л*	*л*	*л*
и и л	*л*	*и*	*л*
и л и	*и*	*и*	*л*
и л л	*и*	*и*	*л*
л и и	*и*	*л*	*и*
л и л	*и*	*и*	*л*
л л и	*л*	*и*	*и*
л л л	*л*	*и*	*л*

Данные формулы несовместимы по истинности, поскольку в таблице отсутствует строка, в которой они одновременно принимали бы значение *и*. Вместе с тем в первой строке каждая из этих формул ложна, поэтому они совместимы по ложности. Следовательно, показания сразу всех трех свидетелей не могут быть правдивыми, но могут быть ошибочными.

На основе фундаментальных логических отношений – совместимости по истинности, совместимости по ложности и логического следования – могут быть определены другие типы отношений по истинности и ложности между формулами. Перечислим наиболее употребимые отношения между двумя формулами.

Отношение противоречия (*контрадикторность*).

Формулы А и В находятся в отношении *противоречия*, если и только если они несовместимы по истинности и несовместимы по ложности.

Отношение противоположности (*контрарность*).

Формулы А и В находятся в отношении *противоположности*, если и только если они несовместимы по истинности, но совместимы по ложности.

Отношение подпротивоположности (*субконтрарность*).

Формулы А и В находятся в отношении *подпротивоположности*, если и только если они совместимы по истинности, но несовместимы по ложности.

Отношение логической эквивалентности.

Формулы А и В *логически эквивалентны*, если и только если из А логически следует В и из В логически следует А.

Из определения вытекает, что в каждой строке совместной таблицы обе логически эквивалентные формулы принимают одинаковые значения.

Отношение логического подчинения.

Формула А *подчиняется* формуле В, если и только если из В логически следует А, но из А не следует логически В,

т. е. в совместной для **А** и **В** таблице отсутствует строка, в которой **В** истинна, а **А** ложна, но имеется строка с истинной **А** и ложной **В**.

Отношение логической независимости.

Формулы А и В *логически независимы*, если и только если они совместимы по истинности и по ложности и не следуют друг из друга.

Из данного определения вытекает, что в совместной таблице для логически независимых формул **А** и **В** имеются все возможные комбинации значений: есть строка, в которой они одновременно истинны, есть строка, в которой они одновременно ложны, есть строка, в которой **А** истинна, а **В** ложна, и, наконец, есть строка, в которой **В** истинна, а **А** ложна. Таблица истинности из предыдущего примера свидетельствует о том, что $\mathbf{q} \supset \neg\mathbf{r}$ и $\neg\mathbf{p} \,\&\, \mathbf{r}$ являются логически независимыми формулами.

Установим логические отношения между произвольными парами следующих формул: **p & q**, **p ∨ q**, **p ⊃ q**, **p ↓ q**.

p q	p & q	p ∨ q	p ⊃ q	p ↓ q
и и	*и*	*и*	*и*	*л*
и л	*л*	*и*	*л*	*л*
л и	*л*	*и*	*и*	*л*
л л	*л*	*л*	*и*	*и*

Формула **p ∨ q**, так же как и формула **p ⊃ q**, логически подчиняется формуле **p & q**, а формула **p ⊃ q** – формуле **p ↓ q**. Формулы **p & q** и **p ↓ q** находятся в отношении противоположности, формулы **p ∨ q** и **p ⊃ q** – в отношении подпротивоположности, а формулы **p ∨ q** и **p ↓ q** противоречат друг другу.

§5. Основные законы и способы правильных рассуждений логики высказываний

В предыдущих параграфах был сформулирован эффективный метод, позволяющий в рамках классической логики высказываний осуществлять проверку умозаключений и решать вопрос о логической истинности высказываний. Однако при практическом использовании логики, т. е. при осуществлении и анализе рассуждений в естественном языке, каждый раз применять процедуру построения таблиц истинности было бы делом громоздким. Поэтому имеет смысл выделить наиболее важные и часто встречающиеся в практике аргументации логические законы и способы правильных рассуждений. Владея этим минимумом логических средств, можно с успехом пользоваться им в процессе рассуждения, не опасаясь совершить логическую ошибку.

Выделим сначала наиболее известные законы логики высказываний. При этом будем указывать не сами тождественно-истинные формулы, а их типы или, как говорят, *схемы* тождественно-истинных формул. Что же представляют собой эти схемы?

Начнем с того, что законы логики высказываний обладают одной важной особенностью: если любую переменную в них везде, где она встречается, заменить некоторой формулой, то в результате снова получится тождественно-истинная формула.

Рассмотрим, например, формулу $\neg(\mathbf{p} \mathbin{\&} \mathbf{q}) \supset (\neg\mathbf{p} \vee \neg\mathbf{q})$. В §3 было показано, что она является законом логики высказываний. Заменив, скажем, переменную **p** формулой $\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$, а переменную **q** – формулой $\neg\mathbf{r}$, получим новую формулу $\neg((\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \mathbin{\&} \neg\mathbf{r}) \supset (\neg(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \vee \neg\neg\mathbf{r})$. Нетрудно убедиться в том, что она, так же как и исходная формула, является законом логики высказываний.

Итак, если в тождественно-истинной формуле $\neg(\mathbf{p} \mathbin{\&} \mathbf{q}) \supset (\neg\mathbf{p} \vee \neg\mathbf{q})$ заменить все вхождения переменной **p** на произвольную формулу **A**, а все вхождения **q** на произвольную формулу **B**, то полученная формула вида $\neg(\mathbf{A} \mathbin{\&} \mathbf{B}) \supset (\neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B})$ также будет тождественно-истинной.

Рассмотрим теперь само выражение «$\neg(\mathbf{A} \mathbin{\&} \mathbf{B}) \supset (\neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B})$». Оно не является формулой языка логики высказываний, так как символы **A** и **B** не содержатся в алфавите этого языка. Данные символы мы используем в метаязыке для обозначения произвольных формул объектного языка – языка пропозициональной логики. Они выступают *метапеременными*, пробегающими по множеству формул. Поэтому $\neg(\mathbf{A} \mathbin{\&} \mathbf{B}) \supset (\neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B})$ является метаязыковым выражением, репрезентирующим класс формул со сходной структурой; элементами данного класса являются, например, формулы объектного языка: $\neg(\mathbf{p} \mathbin{\&} \mathbf{q}) \supset (\neg\mathbf{p} \vee \neg\mathbf{q})$, $\neg((\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \mathbin{\&} \neg\mathbf{r}) \supset (\neg(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \vee \neg\neg\mathbf{r})$ и др.

Выражения, содержащие метапеременные, пробегающие по формулам объектного языка, называют *схемами формул*. Если же схема формул репрезентирует такой класс, каждая формула которого является законом логической теории, то ее называют *схемой законов* данной теории. Метаязыковое выражение $\neg(\mathbf{A} \mathbin{\&} \mathbf{B}) \supset (\neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B})$ как раз и является одной из схем законов логики высказываний.

Приведем список наиболее важных схем тождественно-истинных формул классической логики высказываний.

1. *Закон тождества*:

   $\mathbf{A} \supset \mathbf{A}$.

2. *Закон противоречия*:

   $\neg(\mathbf{A} \mathbin{\&} \neg\mathbf{A})$.

3. *Закон исключенного третьего*:

   $\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{A}$.

4. *Законы удаления &*:

   $(\mathbf{A} \mathbin{\&} \mathbf{B}) \supset \mathbf{A}$, $\quad (\mathbf{A} \mathbin{\&} \mathbf{B}) \supset \mathbf{B}$.

5. *Законы введения* $\vee$:

$\mathbf{A} \supset (\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$, $\quad \mathbf{B} \supset (\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$.

6. *Законы коммутативности & и* $\vee$:

$(\mathbf{A}\ \&\ \mathbf{B}) \equiv (\mathbf{B}\ \&\ \mathbf{A})$,

$(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \equiv (\mathbf{B} \vee \mathbf{A})$.

7. *Законы ассоциативности & и* $\vee$:

$((\mathbf{A}\ \&\ \mathbf{B})\ \&\ \mathbf{C}) \equiv (\mathbf{A}\ \&\ (\mathbf{B}\ \&\ \mathbf{C}))$,

$((\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{C}) \equiv (\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \vee \mathbf{C}))$.

8. *Законы дистрибутивности & относительно* $\vee$ *и наоборот*:

$(\mathbf{A}\ \&\ (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})) \equiv ((\mathbf{A}\ \&\ \mathbf{B}) \vee (\mathbf{A}\ \&\ \mathbf{C}))$,

$(\mathbf{A} \vee (\mathbf{B}\ \&\ \mathbf{C})) \equiv ((\mathbf{A} \vee \mathbf{B})\ \&\ (\mathbf{A} \vee \mathbf{C}))$.

9. *Законы поглощения*:

$(\mathbf{A}\ \&\ (\mathbf{A} \vee \mathbf{B})) \equiv \mathbf{A}$, $\quad (\mathbf{A} \vee (\mathbf{A}\ \&\ \mathbf{B})) \equiv \mathbf{A}$.

10. *Законы идемпотентности*:

$(\mathbf{A}\ \&\ \mathbf{A}) \equiv \mathbf{A}$, $\quad (\mathbf{A} \vee \mathbf{A}) \equiv \mathbf{A}$.

11. *Закон удаления тождественно-истинного члена конъюнкции*:

$(\mathbf{A}\ \&\ (\mathbf{B} \vee \neg\mathbf{B})) \equiv \mathbf{A}$.

12. *Закон удаления тождественно-ложного члена дизъюнкции*:

$(\mathbf{A} \vee (\mathbf{B}\ \&\ \neg\mathbf{B})) \equiv \mathbf{A}$.

13. *Закон утверждения консеквента*:

$\mathbf{A} \supset (\mathbf{B} \supset \mathbf{A})$.

14. *Закон самодистрибутивности импликации*:

$(\mathbf{A} \supset (\mathbf{B} \supset \mathbf{C})) \supset ((\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \supset (\mathbf{A} \supset \mathbf{C}))$.

15. *Законы транзитивности импликации*:

$(\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \supset ((\mathbf{B} \supset \mathbf{C}) \supset (\mathbf{A} \supset \mathbf{C}))$,

$(\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \supset ((\mathbf{C} \supset \mathbf{A}) \supset (\mathbf{C} \supset \mathbf{B}))$.

16. *Закон перестановочности антецедентов*

$(\mathbf{A} \supset (\mathbf{B} \supset \mathbf{C})) \supset (\mathbf{B} \supset (\mathbf{A} \supset \mathbf{C}))$.

17. *Закон Пирса*:

$((\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \supset \mathbf{A}) \supset \mathbf{A}$.

18. *Закон импортации*:

$(\mathbf{A} \supset (\mathbf{B} \supset \mathbf{C})) \supset ((\mathbf{A}\ \&\ \mathbf{B}) \supset \mathbf{C})$.

19. *Закон экспортации*:

$((\mathbf{A} \ \& \ \mathbf{B}) \supset \mathbf{C}) \supset (\mathbf{A} \supset (\mathbf{B} \supset \mathbf{C}))$.

20. *Законы монотонности*:

$(\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \supset ((\mathbf{A} \ \& \ \mathbf{C}) \supset (\mathbf{B} \ \& \ \mathbf{C}))$,

$(\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \supset ((\mathbf{A} \vee \mathbf{C}) \supset (\mathbf{B} \vee \mathbf{C}))$.

21. *Законы введения &*:

$\mathbf{A} \supset (\mathbf{B} \supset (\mathbf{A} \ \& \ \mathbf{B}))$,

$(\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \supset ((\mathbf{A} \supset \mathbf{C}) \supset (\mathbf{A} \supset (\mathbf{B} \ \& \ \mathbf{C})))$.

22. *Законы снятия и введения двойного отрицания*:

$\neg\neg\mathbf{A} \supset \mathbf{A}$, $\quad \mathbf{A} \supset \neg\neg\mathbf{A}$.

23. *Закон отрицания антецедента*:

$\neg\mathbf{A} \supset (\mathbf{A} \supset \mathbf{B})$.

24. *Законы введения* $\neg$:

$(\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \supset ((\mathbf{A} \supset \neg\mathbf{B}) \supset \neg\mathbf{A})$,

$(\mathbf{A} \supset \neg\mathbf{A}) \supset \neg\mathbf{A}$.

25. *Закон контрапозиции*:

$(\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \supset (\neg\mathbf{B} \supset \neg\mathbf{A})$.

26. *Закон обратной контрапозиции*:

$(\neg\mathbf{B} \supset \neg\mathbf{A}) \supset (\mathbf{A} \supset \mathbf{B})$.

27. *Законы сложной контрапозиции*:

$((\mathbf{A} \ \& \ \mathbf{B}) \supset \mathbf{C}) \equiv ((\mathbf{A} \ \& \ \neg\mathbf{C}) \supset \neg\mathbf{B})$,

$(\mathbf{A} \supset (\mathbf{B} \supset \mathbf{C})) \supset (\neg\mathbf{B} \supset (\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{C}))$.

28. *Закон Дунса Скота* («*Из противоречия следует все, что угодно*»):

$(\mathbf{A} \ \& \ \neg\mathbf{A}) \supset \mathbf{B}$.

29. «*Логический закон следует из чего угодно*»:

$\mathbf{A} \supset (\mathbf{B} \vee \neg\mathbf{B})$.

30. *Законы де Моргана*:

$\neg(\mathbf{A} \ \& \ \mathbf{B}) \equiv (\neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B})$, $\quad \neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \equiv (\neg\mathbf{A} \ \& \ \neg\mathbf{B})$.

31. *Закон отрицания импликации*:

$\neg(\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \equiv (\mathbf{A} \ \& \ \neg\mathbf{B})$.

32. *Законы взаимовыразимости пропозициональных связок*:

$$(\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \equiv (\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B}),$$
$$(\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \equiv \neg(\mathbf{A} \mathbin{\&} \neg\mathbf{B}),$$
$$(\mathbf{A} \mathbin{\&} \mathbf{B}) \equiv \neg(\mathbf{A} \supset \neg\mathbf{B}),$$
$$(\mathbf{A} \mathbin{\&} \mathbf{B}) \equiv \neg(\neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B}),$$
$$(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \equiv (\neg\mathbf{A} \supset \mathbf{B}),$$
$$(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \equiv \neg(\neg\mathbf{A} \mathbin{\&} \neg\mathbf{B}),$$
$$(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \equiv ((\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \supset \mathbf{B}).$$

Укажем далее формы правильных умозаключений, наиболее употребимых в практике аргументации. Рассмотрим в этой связи несколько классов умозаключений и выделим в каждом из этих классов некоторые типы корректных, с точки зрения классической логики высказываний, рассуждений. При формулировке типов правильных умозаключений будем вновь использовать схемы формул языка этой логической теории.

1. *Условно-категорические умозаключения*. Это двухпосылочные умозаключения, которые содержат импликативную посылку, т. е. посылку вида $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$. Другая же посылка, а также заключение может быть либо антецедентом (**A**), либо консеквентом (**B**) первой посылки, либо отрицанием того или другого ($\neg\mathbf{A}$ или $\neg\mathbf{B}$).

К числу правильных условно-категорических умозаключений относятся, например, умозаключения следующего типа:

$$\frac{\mathbf{A} \supset \mathbf{B},\ \mathbf{A}}{\mathbf{B}.}$$

Данный способ рассуждения получил в средневековой логике название *modus ponens*, что означает «*утверждающий способ рассуждения*». Действительно, в умозаключении данного типа мы переходим от утверждения антецедента **A** импликативной посылки $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ к утверждению ее консеквента **B**.

Примером *modus ponens* является следующее умозаключение:

«Если отмечается спад производства, то растет число безработных. Спад производства отмечается. Следовательно, число безработных растет».

Другим типом правильных условно-категорических умозаключений является так называемый *modus tollens* – «*отрицающий способ рассуждения*»:

$$\frac{A \supset B, \neg B}{\neg A.}$$

В умозаключениях данной структуры осуществляется переход от отрицания консеквента (¬**B**) импликативной посылки **A** ⊃ **B** к отрицанию ее антецедента (¬**A**), например:

«Если благородная цель оправдывает любые средства, то можно лишить человека жизни, если он смертельно болен и вы хотите укоротить его страдания. Но нельзя лишать человека жизни, даже когда он смертельно болен и вы хотите укоротить его страдания. Поэтому неверно, что благородная цель оправдывает любые средства».

Отметим, что не являются правильными следующие способы условно-категорических умозаключений:

$$\frac{A \supset B, B}{A,} \qquad \frac{A \supset B, \neg A}{\neg B.}$$

Действительно, при ложном **A** и истинном **B** посылки умозаключений этих типов оказываются одновременно истинными, а заключения – ложными. Поэтому, в общем случае переход от утверждения консеквента к утверждению антецедента и переход от отрицания антецедента к отрицанию консеквента логически некорректны.

2. *Разделительно-категорические умозаключения.* Это также двухпосылочные умозаключения, причем в них имеется дизъюнктивная посылка (**A** ∨ **B**) или строго дизъюнктивная посылка (**A** $\underline{\vee}$ **B**). Другая посылка и заключение представляют собой какой-то из дизъюнктивных членов (**A** или **B**) или отрицание какого-то из дизъюнктивных членов (¬**A** или ¬**B**).

Один из типов правильных разделительно-категорических умозаключений составляют следующие способы рассуждения:

$$\frac{A \vee B, \neg A}{B,} \qquad \frac{A \vee B, \neg B}{A.}$$

Они получили название *modus tollendo ponens*, что означает «*отрицающе-утверждающий способ рассуждения*». Действительно, в умозаключениях данной структуры осуществляется переход от отрицания одного из членов дизъюнктивной посылки к утверждению другого ее члена. Заметим, что к числу правильных относятся также такие умозаключения, в которых вместо дизъюнктивной содержится строго дизъюнктивная посылка – высказывание вида $\mathbf{A} \veebar \mathbf{B}$. Приведем пример использования *modus tollendo ponens* в естественных рассуждениях:

«Этот человек заблуждается сам или сознательно вводит в заблуждение других. Но сам этот человек не заблуждается. Следовательно, он сознательно вводит в заблуждение других».

Вместе с тем не относятся к числу корректных следующие типы разделительно-категорических умозаключений:

$$\frac{\mathbf{A} \vee \mathbf{B}, \mathbf{A}}{\neg \mathbf{B},} \qquad \frac{\mathbf{A} \vee \mathbf{B}, \mathbf{B}}{\neg \mathbf{A}.}$$

Очевидно, что при истинных **A** и **B** посылки данных умозаключений одновременно истинны, а заключения – ложны.

Однако если дизъюнктивную посылку этих умозаключений заменить строго дизъюнктивной, то получим правильные способы рассуждения:

$$\frac{\mathbf{A} \veebar \mathbf{B}, \mathbf{A}}{\neg \mathbf{B}\,,} \qquad \frac{\mathbf{A} \veebar \mathbf{B}, \mathbf{B}}{\neg \mathbf{A}\,.}$$

Умозаключения подобного типа имеют название *modus ponendo tollens*, что означает «*утверждающе-отрицающий способ рассуждения*». В них осуществляется переход от утверждения одного из членов строго дизъюнктивной посылки к отрицанию другого ее члена, например:

«Шахматист К. примет участие только в одном из двух турниров: он либо выступит на турнире в Тилбурге, либо выступит на турнире в Линаресе. Известно, что К. принял приглашение принять участие в турнире в Линаресе. Следовательно, К. не выступит на турнире в Тилбурге».

3. *Условно-разделительные умозаключения*. Эти умозаключения содержат несколько импликативных посылок и одну дизъюнктивную посылку. Выделим некоторые типы правильных условно-разделительных умозаключений с двумя импликативными посылками. Такие умозаключения называют *дилеммами*:

$$\frac{A \supset C,\ B \supset C,\ A \vee B}{C}$$ – *простая конструктивная дилемма*

$$\frac{A \supset C,\ B \supset D,\ A \vee B}{C \vee D}$$ – *сложная конструктивная дилемма*

$$\frac{C \supset A,\ C \supset B,\ \neg A \vee \neg B}{\neg C}$$ – *простая деструктивная дилемма*

$$\frac{C \supset A,\ D \supset B,\ \neg A \vee \neg B}{\neg C \vee \neg D}$$ – *сложная деструктивная дилемма*

Пример простой конструктивной дилеммы:

«Если Н. упорен в достижении поставленной цели, то он способен овладеть логикой. Если у него есть склонность к строгому абстрактному мышлению, то он способен овладеть этой наукой. Известно, что Н. упорен в достижении поставленной цели или имеет склонность к строгому абстрактному мышлению. Следовательно, он способен овладеть логикой».

Пример сложной конструктивной дилеммы:

«Если президент подпишет законопроект, то он лишится поддержки профсоюзов. Если же президент наложит на данный законопроект вето, то он потеряет доверие предпринимателей. Ясно, что президент или подпишет законопроект, или наложит на него вето. Поэтому он лишится поддержки профсоюзов или же потеряет доверие предпринимателей».

Пример простой деструктивной дилеммы:

«Если ученый А. честолюбив, то он хочет защитить диссертацию. Если А. честолюбив, то он стремится продвинуться по службе. У А. нет желания защитить диссертацию или нет желания продвинуться по службе. Следовательно, ученый А. нечестолюбив».

Пример сложной деструктивной дилеммы:

«Если В. верит слухам о близком конце света, то он глуп. Если же В. сам распускает такие слухи, то он беспринципен. В. не глуп или не лишен принципов. Поэтому он не верит слухам о близком конце света или не распускает эти слухи сам».

Умозаключения являются простейшей разновидностью рассуждений. При осуществлении более сложных рассуждений наряду с умозаключениями применяются и иные, *непрямые способы аргументации*. Эти приемы используются тогда, когда в ходе некоторого основного рассуждения строятся другие рассуждения, носящие вспомогательный характер.

Предположим, что целью основного рассуждения является обоснование некоторого тезиса **А** из некоторого множества аргументов **Г**. В ряде случаев решение данной задачи сводят к решению подзадач – к построению одного или нескольких вспомогательных рассуждений: к выведению высказывания $\mathbf{B_1}$ из множества высказываний $\mathbf{\Delta_1}$, к выведению $\mathbf{B_2}$ из $\mathbf{\Delta_2}$, ..., к выведению $\mathbf{B_n}$ из $\mathbf{\Delta_n}$. Если указанные подзадачи решены, то заключают о достижении основной цели рассуждения – о получении **А** из **Г**. При этом переходе как раз и используется непрямой способ аргументации. Таким образом:

> ***Непрямой способ аргументации* – это прием, позволяющий делать вывод об осуществлении некоторого основного рассуждения при осуществлении одного или нескольких вспомогательных рассуждений, т. е. это переход следующего типа:**
>
> $$\dfrac{\begin{array}{l}\text{Из } \Delta_1 \text{ выведено } B_1\\ \text{Из } \Delta_2 \text{ выведено } B_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \text{Из } \Delta_n \text{ выведено } B_n\end{array}}{\text{Из } \Gamma \text{ выведено } A.}$$

Возникает вопрос: какие из переходов указанного рода являются правильными с логической точки зрения, а какие – нет, каков критерий логической корректности непрямых способов аргументации.

> ***Непрямой способ аргументации корректен*, если и только если он гарантирует сохранение логического следования при переходе от вспомогательных рассуждений к основному, т. е. обеспечивает логическое следование А из Г, когда $\mathbf{B_1}$ следует из $\mathbf{\Delta_1}$, $\mathbf{B_2}$ следует из $\mathbf{\Delta_2}$, ..., $\mathbf{B_n}$ следует из $\mathbf{\Delta_n}$.**

Чтобы продемонстрировать логическую корректность непрямого способа аргументации, нужно допустить, что $\mathbf{\Delta_1 \models B_1}$, $\mathbf{\Delta_2 \models B_2}$, ..., $\mathbf{\Delta_n \models B_n}$, и показать, что при этом $\mathbf{\Gamma \models A}$.

Выделим несколько видов непрямых способов аргументации, часто используемых в практике построения рассуждений, и докажем их логическую корректность.

1. *Рассуждение по правилу дедукции.* Данная аргументация применяется в случае, когда целью рассуждения является обоснование посредством некоторого множества аргументов **Г** тезиса, который представляет собой импликативное высказывание $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$. Тогда осуществляется следующее вспомогательное рассуждение: принимается в качестве допущения антецедент **A** импликативного высказывания, а затем выводится из **Г** и **A** его консеквент **B**. При решении указанной подзадачи заключают, что тезис $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ обоснован посредством **Г**.

Метод непрямого рассуждения по правилу дедукции имеет, таким образом, следующую структуру:

$$\frac{\text{Из } \mathbf{Г} \text{ и } \mathbf{A} \text{ выведено } \mathbf{B}}{\text{Из } \mathbf{Г} \text{ выведено } \mathbf{A} \supset \mathbf{B}.}$$

Приведем пример содержательного рассуждения, в котором используется данный способ аргументации:

> «Докажем, что если число оканчивается на 0 и сумма его цифр кратна 3, то это число кратно 15. Допустим, что данное число оканчивается на 0 и сумма его цифр кратна 3. Известно, что если число оканчивается на 0, то оно кратно 5. Поэтому наше число кратно 5, ведь, согласно допущению, оно оканчивается на 0. Известно также, что если сумма цифр числа кратна 3, то и само это число кратно 3. Поэтому наше число кратно 3, ведь, согласно допущению, сумма его цифр кратна 3. Итак, наше число кратно 5 и 3. Но если число кратно 5 и 3, то оно кратно 15. Следовательно, наше число кратно 15. Таким образом, если число оканчивается на 0 и сумма его цифр кратна 3, то это число кратно 15».

Проанализируем ход данного рассуждения. В нем обосновывается истинность импликативного тезиса:

> «Если число оканчивается на 0 и сумма его цифр кратна 3, то это число кратно 15».

В процессе рассуждения использованы следующие аргументы:

(а) Если число оканчивается на 0, то это число кратно 5.
(б) Если сумма цифр числа кратна 3, то само это число кратно 3.
(в) Если число кратно 5 и 3, то оно кратно 15.

В качестве допущения в рассуждении принимается антецедент обосновываемого тезиса:

(г) Число оканчивается на 0 и сумма его цифр кратна 3.

Далее из допущения (г) и аргументов (а)–(в) посредством цепочки умозаключений выводится консеквент тезиса:

(д) Данное число кратно 15.

Затем, применяя метод рассуждения по правилу дедукции, заключаем, что наш импликативный тезис обоснован посредством аргументов (а)–(в).

Продемонстрируем теперь логическую корректность данного непрямого способа аргументации – покажем, что в случае наличия логического следования вида $\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \models \mathbf{B}$ имеет место логическое следование вида $\mathbf{\Gamma} \models \mathbf{A} \supset \mathbf{B}$.

(1) Пусть $\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \models \mathbf{B}$.

Согласно определению логического следования, это означает:

(2) Не существует такой интерпретации пропозициональных переменных, при которой все формулы из **Г** истинны, **A** – истинна, а **B** – ложна.

Согласно условиям ложности импликативных формул:

(3) Выражение «**A** истинна, а **B** ложна» равносильно выражению «$\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ ложна».

Осуществим замену выражения «**A** истинна, а **B** ложна» в составе (2) на равносильное ему «$\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ ложна»:

(4) Не существует интерпретации, при которой все формулы из **Г** истинны, а $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ – ложна.

Снова используем определение логического следования:

(5) $\mathbf{\Gamma} \models \mathbf{A} \supset \mathbf{B}$.

Доказательство завершено.

2. *Рассуждение от противного.* Данный метод рассуждения состоит в следующем: для обоснования некоторого тезиса **A** из множества аргументов **Г** принимают в качестве допущения $\neg\mathbf{A}$ и стремятся вывести из **Г** и $\neg\mathbf{A}$ противоречие – некоторую формулу **B** и ее отрицание $\neg\mathbf{B}$. При положительном решении данных вспомогательных подзадач заключают, что тезис **A** обоснован посредством аргумен-

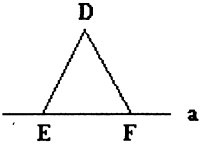
тов **Г**. Таким образом, данный непрямой способ аргументации имеет следующую структуру:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Из } \mathbf{Г} \text{ и } \neg\mathbf{A} \text{ выведено } \mathbf{B}\\ \text{Из } \mathbf{Г} \text{ и } \neg\mathbf{A} \text{ выведено } \neg\mathbf{B}\end{array}}{\text{Из } \mathbf{Г} \text{ выведено } \mathbf{A}.}$$

В качестве иллюстрации применения метода рассуждения от противного приведем доказательство одной из теорем евклидовой геометрии:

Докажем, что из точки, не лежащей на прямой, можно опустить на эту прямую не более одного перпендикуляра.

Предположим, что это утверждение неверно, и постараемся прийти к противоречию. Из нашего допущения вытекает, что из некоторой точки **D** можно опустить на некоторую прямую **a** более чем один перпендикуляр, например два различных перпендикуляра **DE** и **DF**:



По определению перпендикуляра, углы **DEF** и **DFE** равны 90°. Поскольку отрезки **DE** и **DF** не совпадают, угол **EDF** больше 0°. Следовательно, сумма внутренних углов треугольника **DEF** больше 180°. Но сумма внутренних углов любого треугольника в точности равна 180°. Таким образом, во вспомогательном рассуждении при допущении, что теорема неверна, получено противоречие. Поэтому теорема считается доказанной.

Обоснуем корректность способа рассуждения от противного, т. е. покажем, что если $\mathbf{Г}, \neg\mathbf{A} \models \mathbf{B}$ и $\mathbf{Г}, \neg\mathbf{A} \models \neg\mathbf{B}$, то $\mathbf{Г} \models \mathbf{A}$.

(1) Пусть $\mathbf{Г}, \neg\mathbf{A} \models \mathbf{B}$ и

(2) $\mathbf{Г}, \neg\mathbf{A} \models \neg\mathbf{B}$.

В силу только что доказанной корректности рассуждения по правилу дедукции, из (1) и (2), соответственно, получаем:

(3) $\mathbf{Г} \models \neg\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$,

(4) $\mathbf{Г} \models \neg\mathbf{A} \supset \neg\mathbf{B}$.

Отсюда по определению логического следования имеем:

(5) Для всякой интерпретации, при которой все формулы из **Г** истинны, формула $\neg\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ также истинна.

(6) Для всякой интерпретации, при которой все формулы из **Г** истинны, формула $\neg\mathbf{A} \supset \neg\mathbf{B}$ также истинна.

Нам необходимо показать, что для любой интерпретации пропозициональных переменных верно, что если все формулы из **Г** истинны при этой интерпретации, то и формула **A** примет значение «истина». Рассмотрим произвольную интерпретацию **I**, допустимую в классической логике высказываний. Далее в метаязыке рассуждаем по правилу дедукции.

(7) Пусть все формулы из **Г** истинны при интерпретации **I**.

Из (5) и (7) следует:

(8) Формула $\neg\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ истинна при интерпретации **I**.

Аналогично, из (6) и (7) получаем:

(9) Формула $\neg\mathbf{A} \supset \neg\mathbf{B}$ истинна при интерпретации **I**.

Используя метод таблиц истинности несложно установить, что

(10) $\neg\mathbf{A} \supset \mathbf{B}, \neg\mathbf{A} \supset \neg\mathbf{B} \models \mathbf{A}$.

Последнее, в силу определения логического следования, означает:

(11) Для всякой интерпретации, при которой истинны формулы $\neg\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ и $\neg\mathbf{A} \supset \neg\mathbf{B}$, формула **A** также истинна.

Из (11), (8) и (9) получаем:

(12) Формула **A** истинна при интерпретации **I**.

Последовательность шагов (7)–(12) представляет собой вспомогательное рассуждение, из которого по правилу дедукции выводится:

(13) Если все формулы из **Г** истинны при интерпретации **I**, то формула **A** истинна при интерпретации **I**.

Поскольку утверждение (13) установлено для произвольной интерпретации пропозициональных переменных, по определению логического следования имеем:

(14) $\mathbf{\Gamma} \models \mathbf{A}$.

Доказательство завершено.

3. *Рассуждение сведением к абсурду*. Этот непрямой способ аргументации сходен с только что рассмотренным. Если требуется с помощью аргументов **Г** обосновать высказывание, главной связкой которого является отрицание, т. е. высказывание вида $\neg$**A**, то в качестве допущения принимают **A** и стремятся в ходе вспомогательных рассуждений вывести противоречие – формулу **B** и ее отрицание $\neg$**B**. Переход от вспомогательных рассуждений к основному имеет следующий вид:

$$\frac{\text{Из } \mathbf{Г} \text{ и } \mathbf{A} \text{ выведено } \mathbf{B} \qquad \text{Из } \mathbf{Г} \text{ и } \mathbf{A} \text{ выведено } \neg\mathbf{B}}{\text{Из } \mathbf{Г} \text{ выведено } \neg\mathbf{A}.}$$

Корректность данного способа аргументации доказывается аналогично методу рассуждения от противного. Применим метод сведения к абсурду на практике.

Представим себе сложное автоматическое устройство, которое состоит из механизмов **P**, **Q**, **R**, **S** и удовлетворяет следующим условиям:
(а) Если работает механизм **P**, то не работает механизм **Q**.
(б) Всегда работает по крайней мере один из механизмов **Q** или **R**.
(в) Если работает механизм **S**, то не работает механизм **R**.
Докажем, что в данном автоматическом устройстве механизмы **P** и **S** не могут работать одновременно.

Примем допущение:

(г) Механизмы **P** и **S** работают одновременно.

Отсюда следует:

(д) Работает механизм **P**.
(е) Работает механизм **S**.

Из (а) и (д) по *modus ponens* получаем:

(ж) Не работает механизм **Q**.

Из (б) и (ж) по *modus tollendo ponens* имеем:

(з) Работает механизм **R**.

Но из (в) и (е) по *modus ponens* выводится:

(и) Не работает механизм **R**.

Наличие (з) и (и) говорит о том, что мы получили противоречие.

Цель вспомогательного рассуждения достигнута. Поэтому, согласно методу сведения к абсурду, можно утверждать, что тезис о невозможности одновременной работы механизмов **P** и **S** обоснован аргументами (а)–(в).

4. *Рассуждение разбором случаев.* Данный непрямой способ аргументации может быть применен в том случае, когда целью основного рассуждения является обоснование некоторого тезиса **C** посредством дизъюнктивного аргумента **A** ∨ **B**, а также, возможно, и множества других аргументов **Г**. Задача по выведению **C** из **Г** и **A** ∨ **B** может быть сведена к двум подзадачам: 1) к выведению **C** из **Г** и допущения **A** – первого члена аргумента **A** ∨ **B**, 2) к выведению **C** из **Г** и допущения **B** – второго дизъюнктивного члена этого аргумента. Рассмотрев каждый из этих случаев и показав, что **C** может быть обосновано как при допущении **A**, так и при допущении **B**, заключают, что **C** обосновано посредством **A** ∨ **B** и **Г**. Таким образом, рассуждение разбором случаев имеет следующую структуру:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Из } \mathbf{Г} \text{ и } \mathbf{A} \text{ выведено } \mathbf{C}\\ \text{Из } \mathbf{Г} \text{ и } \mathbf{B} \text{ выведено } \mathbf{C}\end{array}}{\text{Из } \mathbf{Г} \text{ и } \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \text{ выведено } \mathbf{C}.}$$

Приведем пример использования данного способа аргументации. Формулировка знаменитого *парадокса Лжеца* представляет собой не что иное, как рассуждение разбором случаев. Рассмотрим высказывание:

«Это высказывание ложно»,

содержащее информацию о собственной ложности. Обозначим его символом **D**. Суть парадокса состоит теперь в том, что из предположения о наличии у высказывания **D** какого-либо истинностного значения («истина» или «ложь») выводится противоречие, например, утверждение о том, что **D** является и истинным, и не истинным.

Самопротиворечивый тезис выводится из дизъюнктивного аргумента «**D** истинно или **D** ложно» разбором случаев.

Случай 1. В качестве допущения принимаем первый член дизъюнкции:

1) **D** истинно.

Отсюда следует, что утверждение, которое содержит **D**, соответствует действительности, но **D** содержит утверждение о собственной ложности, значит:

2) **D** ложно.

Поскольку ложность **D** означает, что оно не истинно, получаем:

3) **D** не истинно.

Утверждения (1) и (3) свидетельствуют о том, что в рассматриваемом случае можно получить самопротиворечивое высказывание:

4) **D** истинно и не истинно.

Случай 2 . В качестве допущения принимаем второй член дизъюнкции:

1) **D** ложно.

Но **D** как раз и утверждает, что оно ложно. Следовательно, утверждение, содержащееся в **D**, соответствует действительности, и потому

2) **D** истинно.

Поскольку из ложности **D** вытекает, что оно не истинно, мы из (1) получаем:

3) **D** не истинно.

Мы снова пришли к противоречию:

4) **D** истинно и не истинно.

Итак, из первого дизъюнктивного члена «**D** истинно» получен самопротиворечивый тезис «**D** истинно и не истинно» и из второго дизъюнктивного члена «**D** ложно» получен тот же тезис. Поэтому можно заключить, что из дизъюнктивного высказывания «**D** истинно или **D** ложно» выводится противоречивое утверждение.

Обоснуем корректность данного непрямого способа аргументации. Допустим:

(1) $\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \models \mathbf{C}$,

(2) $\mathbf{\Gamma}, \mathbf{B} \models \mathbf{C}$.

Необходимо показать, что в таком случае $\mathbf{\Gamma}$, $\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \models \mathbf{C}$. Будем рассуждать от противного. Предположим:

(3) Из **Г** и **A** $\vee$ **B** не следует **C**.

Это означает:

(4) Существует интерпретация, при которой все формулы из **Г** истинны, **A** $\vee$ **B** истинна, а **C** ложна.

Из (1), истинности формул **Г** и ложности **C** вытекает:

(5) **A** ложна при данной интерпретации.

А из (2), истинности формул **Г** и ложности **C** получаем:

(6) **B** ложна при данной интерпретации.

В силу условий ложности дизъюнктивных формул, из (5) и (6) необходимо следует:

(7) **A** $\vee$ **B** ложна при данной интерпретации.

Но, согласно (4):

(8) **A** $\vee$ **B** истинна (т. е. не ложна) при данной интерпретации.

Итак, допустив, что из **Г** и **A** $\vee$ **B** не следует **C**, мы пришли в рассуждении к противоречию. Поэтому при наличии (1) и (2) имеем:

(9) $\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \models \mathbf{C}$.

На этом завершим анализ непрямых способов аргументации.

ГЛАВА III

КЛАССИЧЕСКАЯ ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

§1. Язык логики предикатов

Рассмотренная в предыдущей главе классическая логика высказываний является весьма бедной логической теорией. С ее помощью выделяется сравнительно узкий класс логически истинных высказываний, в ее рамках можно обосновать правильность лишь достаточно ограниченного числа дедуктивных умозаключений.

Причиной указанной ограниченности классической логики высказываний являются недостаточные выразительные возможности ее языка. Действительно, решая в рамках этой теории вопросы о логической истинности высказываний, о правильности или неправильности умозаключений, мы отвлекаемся от внутренней структуры простых предложений, заменяя их пропозициональными переменными. Однако во многих случаях логическая истинность высказывания и правильность умозаключения как раз и обусловливаются особенностями именно внутренней структуры простых предложений.

Примером подобного логически истинного высказывания является высказывание

«Всякий школьник не остроумен, или некоторые школьники остроумны»,

анализ которого был осуществлен в §3 главы I.

В §2 той же главы показано, что правильность умозаключения

М. Тэтчер популярнее С. Рушди.
М. Тэтчер – британский политик.
С. Рушди – британский писатель.
___
Некоторые британские политики популярнее некоторых британских писателей.

обусловлена особенностями внутренней структуры его посылок и заключения, которые являются простыми предложениями, и не может быть установлена средствами пропозициональной логики.

Адекватный логический анализ высказываний и умозаключений указанного типа может быть осуществлен лишь в рамках таких логических теорий, которые строятся с использованием формализованных языков с бóльшими выразительными возможностями. Необходимо, чтобы данные языки позволяли выражать логические формы простых высказываний, раскрывая при этом их внутреннюю структуру, т. е. указывая на то, какого типа логические и нелогические термины входят в состав высказываний и каким образом эти термины сочленяются между собой.

В данной главе будет рассмотрен один достаточно богатый формализованный язык – *язык логики предикатов первого порядка.* С помощью этого языка можно весьма детально выражать внутреннюю структуру простых высказываний. В рамках этого языка будет сформулирована логическая теория – *классическая первопорядковая логика предикатов.* Она называется первопорядковой потому, что в данной теории разрешается связывать кванторами (квантифицировать) переменные единственного типа – предметные переменные, т. е. переменные, возможными значениями которых являются индивиды – объекты первого порядка.

***Кванторная теория*, в частности *логика предикатов*, – это логическая теория, язык которой позволяет анализировать высказывания и умозаключения с учетом внутренней структуры простых высказываний.**

Построение формализованного языка начинается, как уже говорилось, с задания его *алфавита* – множества исходных символов, которые подразделяются на *нелогические, логические* и *технические.*

Прежде чем вводить нелогические символы языка логики предикатов, необходимо выяснить, нелогические термины каких типов содержатся в простых высказываниях естественного языка. Ведь при выявлении внутренней структуры этих высказываний нелогическим терминам каждого типа, имеющимся в естественном языке, сопоставляется собственный тип символов формализованного языка.

Подразделение нелогических терминов естественного языка на категории может проводиться различным образом. При анализе контекстов естественного языка в логике предикатов выделяют три основных типа (категории) нелогических терминов: *имена, предметные функторы* и *предикаторы.*

***Именем* называется термин, обозначающий отдельный объект (индивид).**

Среди имен выделяют *простые* и *сложные. Простые имена* не содержат никакой информации об обозначаемых ими индивидах, являются как бы метками этих объектов. Поэтому их еще называют *именами-ярлыками* или же *собственными именами.* Примерами простых имен являются термины «Луна», «Москва», «Аристотель», «3». *Сложные имена* не только обозначают предмет, но и указывают на какие-либо его свойства, характеристики. Например, сложное имя «естественный спутник Земли» не просто обозначает Луну, но и содержит определенную информацию об этом небесном теле: указывает на его естественное происхождение, а также на то, что оно вращается вокруг Земли. Другие примеры сложных имен – «столица России» (обозначает город Москву), «основатель логики и психологии» (обозначает Аристотеля), «число, получающееся в результате сложения 2 и 1» или «2+1» (обозначает число 3).

Другой класс нелогических терминов составляют *предметные функторы*, которые являются знаками так называемых *предметных функций.* Это наиболее распространенный вид функций, их аргументами и значениями являются индивиды. Предметные функции различаются по *местности*: они бывают одноместными, двухместными, трехместными и т. д.

К предметным функциям относятся, например, арифметические операции над числами. Скажем, функция извлечения квадратного корня сопоставляет отдельным числам отдельные числа, например: индивиду 4 – индивид 2, индивиду 9 – индивид 3. Эта операция представляет собой *функцию от одного аргумента*, или же *одноместную функцию*. Операция сложения является *двухместной предметной функцией*, она парам индивидов (чисел) сопоставляет некоторые индивиды (числа), например: паре аргументов 2 и 1 – число 3 (сумму 2 и 1), паре аргументов 2 и 2 – число 4 и т. д.

Вообще, *n-местная предметная функция* ставит в соответствие *n*-кам индивидов (последовательностям, состоящим из *n* объектов) некие индивиды.

К разряду предметных функций относятся не только операции над числами. Например, функция, сопоставляющая каждому государству его столицу (России – Москву, Франции – Париж и т. д.), также является предметной, ведь она индивидам (государствам) сопоставляет индивиды (города). Эта предметная функция – одноместная.

Двухместной предметной (но не числовой) функцией является функция, сопоставляющая парам населенных пунктов расстояние между ними (например, городам Москва и Санкт-Петербург – величину длины, равную 650 км).

Термины, с помощью которых в языке представляются предметные функции, называются *предметными функторами*.

Например, функция извлечения квадратного корня представляется знаком «√»; функция сложения – знаком «+»; функция, сопоставляющая государству его столицу, – термином «столица»; функция, сопоставляющая паре населенных пунктов величину протяженности между ними, – термином «расстояние от... до...». Указанные языковые выражения как раз и относятся к категории предметных функторов, причем знаки одноместных предметных функций («√», «столица») являются одноместными, а знаки двухместных предметных функций («+», «расстояние от... до...») – двухместными предметными функторами.

Вообще, *n-местный предметный функтор* – это знак *n*-местной предметной функции.

Предметные функторы играют в естественном языке определенную синтаксическую роль – с их помощью можно из одних выражений строить другие выражения языка. В частности, посредством присоединения предметного функтора к именам может быть получено новое, более сложное имя. Например, сочленяя предметный функтор «√» с именем «4», получаем сложное имя «$\sqrt{4}$» (его значением является число 2); сочленяя предметный функтор «столица» с именем «Россия», получаем сложное имя «столица России» (его значением является город Москва). Из имен «2» и «1» с помощью предметного функтора «+» можно образовать сложное имя «2+1» (знак числа 3), а из имен «Москва» и «Санкт-Петербург» с помощью функтора «расстояние от... до...» – имя «расстояние от Москвы до Санкт-Петербурга» (его значение – величина длины 650 км).

С помощью многоместных предметных функторов и имен можно также получать предметные функторы меньшей местности. Так, одноместную функцию, сопоставляющую каждому числу число, на 1 большее его (функцию прибавления 1), можно выразить в языке посредством «...+1», сочленяя двухместный функтор «...+...» с именем «1».

Аналогично из двухместного предметного функтора «расстояние от... до...» получается одноместный – «расстояние от Москвы до...». Это выражение представляет одноместную функцию, сопоставляющую населенному пункту величину расстояния до него от Москвы.

Заметим, что имена могут трактоваться как *нульместные* предметные функторы – знаки функций, число аргументов которых равно 0, а значениями являются индивиды. Например, если термин «расстояние от... до...» – двухместный предметный функтор, а термин «расстояние от Москвы до...» – одноместный предметный функтор, то имя «расстояние от Москвы до Санкт-Петербурга» естественно рассматривать как нульместный предметный функтор.

К третьему типу нелогических терминов относятся *предикаторы*.

***Предикаторы* – это знаки *свойств* и *отношений*.**

Они представляют то, что может предицироваться предметам, т. е. соотноситься с ними. Термины, представляющие свойства (например, «красный», «способный изучать логику», «электропроводный»), являются *одноместными* предикаторами. Термины, представляющие отношения между предметами (например, «больше», «севернее», «старше»), являются *многоместными* предикаторами.

Значениями предикаторов можно также считать *множества*, элементами которых являются либо отдельные предметы, либо последовательности (пары, тройки и т. д.) предметов.

В качестве значения одноместного предикатора, представляющего некоторое свойство, можно рассматривать множество индивидов, обладающих этим свойством. Например, значение предикатора «красный» – множество красных предметов, значение термина «электропроводный» – множество электропроводных веществ. С этой точки зрения, такие термины, как «человек», «государство», «натуральное число», следует также отнести к одноместным предикаторам, поскольку их значениями являются множества индивидов (людей, государств, натуральных чисел). Указанные термины можно рассматривать и как знаки свойств (быть человеком, быть государством, быть натуральным числом).

Значением многоместного предикатора, представляющего некоторое отношение, можно считать также множество, элементами которого являются последовательности (пары, тройки и т. д.) индивидов, находящихся в данном отношении. Например, значением предикатора «больше» является класс всех таких пар чисел, первое из которых больше второго. Так, пара чисел <4, 2> содержится в этом классе, а пара <2, 4> нет, ведь 4 больше 2, но 2 не больше 4. Значением предикатора «севернее» является класс всех таких пар географических точек, первая из которых севернее второй (пара <Санкт-Петербург, Москва> принадлежит этому множеству, а пара <Москва, Санкт-Петербург> – нет).

Если предикатор представляет множество пар индивидов, то этот предикатор *двухместный,* если же элементами этого множества являются тройки индивидов, то он *трехместный.* Вообще,

значением n-местного предикатора является некоторое множество n-ок индивидов (последовательностей, состоящих из n объектов).

Синтаксическая роль, которую играют предикаторы в естественном языке, состоит в следующем: сочленяя их с именами, можно получать высказывания и предикаторы меньшей местности. Например, из одноместного предикатора «человек» и имени «Петр» можно образовать высказывание «Петр – человек». Из двухместного предикатора «севернее» и имени «Москва» получается одноместный предикатор (знак свойства) «севернее Москвы» (он репрезентирует множество индивидов – географических точек, расположенных севернее Москвы). А из этого одноместного предикатора и имени «Санкт-Петербург» образуется высказывание «Санкт-Петербург севернее Москвы». Сами высказывания естественно рассматривать как *нульместные предикаторы.*

Итак, мы выделили основные категории нелогических терминов естественного языка. Напомним также, что в состав простых высказываний могут входить и логические термины – *кванторы*: *квантор общности* («всякий», «любой», «каждый» и т. п.) и *квантор существования* («некоторый», «существует», «имеется» и т. п.). Выявляя логическую форму высказываний естественного языка, мы не должны отвлекаться от смысла кванторов, а также других логических терминов – пропозициональных связок.

Приступим теперь к заданию *алфавита языка классической логики предикатов.*

Нелогическими символами данного формализованного языка являются прежде всего параметры нелогических терминов естественного языка, относящиеся к различным категориям, – параметры имен, предметных функторов и предикаторов.

Первую группу символов составляют *индивидные константы* – параметры собственных имен естественного языка. В качестве символов указанного типа будем использовать буквы **a**, **b**, **c**, **d** без индексов или с индексами, в качестве которых используются целые положительные числа:

$$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1, \mathbf{d}_1, \mathbf{a}_2, \ldots$$

При переводе выражений естественного языка на язык логики предикатов простые имена заменяются предметными константами, причем одинаковые имена – одинаковыми символами из данного списка, а различные – различными.

Вторую группу нелогических символов составляют *n-местные предметно-функциональные константы* ($n \geq 1$) – параметры n-местных функторов естественного языка:

$$\mathbf{f}^n, \mathbf{g}^n, \mathbf{h}^n, \mathbf{f}_1{}^n, \mathbf{g}_1{}^n, \mathbf{h}_1{}^n, \mathbf{f}_2{}^n, \ldots$$

Верхний индекс указывает на местность константы. Одноместный предметный функтор «столица» может быть замещен, например, константой $\mathbf{f}^1$, а двухместный предметный функтор «расстояние от... до...» – параметром $\mathbf{g}^2$.

Третью группу составляют *n-местные предикаторные константы* ($n \geq 1$) – параметры предикаторов естественного языка:

$$\mathbf{P}^n, \mathbf{Q}^n, \mathbf{R}^n, \mathbf{S}^n, \mathbf{P}_1{}^n, \mathbf{Q}_1{}^n, \mathbf{R}_1{}^n, \mathbf{S}_1{}^n\ \mathbf{P}_2{}^n, \ldots$$

Верхний индекс опять-таки указывает на местность константы. Одноместный предикатор «человек» может быть замещен, например, предикаторной константой $\mathbf{P}^1$, а двухместный предикатор «севернее» – параметром $\mathbf{Q}^2$.

Иногда верхние индексы предметно-функциональных и предикаторных констант опускают. В этом случае запрещается использовать один и тот же символ в качестве параметров для функторов и предикаторов различной местности.

Помимо параметров нелогических терминов естественного языка в языке логики предикатов имеется еще одна группа нелогических (дескриптивных) символов. Это так называемые *предметные* (*индивидные*) *переменные*:

$$x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots$$

Предметные переменные принимают различные значения из предметной области анализируемого контекста, т. е. из множества индивидов, к которым относятся утверждения, содержащиеся в данном контексте. Они используются в языке логики предикатов для формальной записи выражений, содержащих кванторы общности и существования.

Логические символы языка классической логики предикатов бывают двух типов. К первому относятся пропозициональные связки – знаки функций истинности. Выберем в качестве исходных связок $\neg$, &, $\vee$, $\supset$, которые составляют функционально полную систему. Ко второму типу относятся кванторы: $\forall$ – квантор общности и $\exists$ – квантор существования.

К *техническим символам* относятся левая и правая скобки, а также запятая.

Построение алфавита языка логики предикатов завершено.

Следующий этап в построении формализованного языка – задание *правил образования* его выражений из символов алфавита. В языке логики предикатов имеются два типа правильно построенных выражений – *термы* и *формулы*. При этом результатом символической записи имен (как простых, так и сложных) естественного языка являются термы, а записи высказываний – формулы.

Определение терма:

1. **Произвольная предметная константа является термом.**
2. **Произвольная предметная переменная является термом.**
3. **Если Ф – *n*-местная предметно-функциональная константа, а $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \ldots, \mathbf{t}_n$ – термы, то $\mathbf{\Phi}(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \ldots, \mathbf{t}_n)$ – терм.**
4. **Ничто иное не является термом.**

Выражения, указанные в пунктах 1 и 2 данного определения, называются *простыми* термами, а те, которые указаны в пункте 3, – *сложными*.

Символы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{c}_3$, например, относятся к числу термов согласно п. 1 определения, а символы x_2, y, z_{10} являются термами согласно п. 2. Символы $\mathbf{f}^1$, $\mathbf{P}^2$ и $\forall$ не являются термами, поскольку не относятся ни к числу предметных констант или предметных переменных, ни к числу выражений вида $\mathbf{\Phi}(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \ldots, \mathbf{t}_n)$.

Определим, является ли термом выражение $\mathbf{f}^1(\mathbf{g}^2(x, \mathbf{a}))$? Данная последовательность знаков имеет вид $\mathbf{\Phi}(\mathbf{t})$, где $\mathbf{\Phi}$ есть $\mathbf{f}^1$ – одноместная предметно-функциональная константа. Согласно п. 3, данное выражение есть терм, если $\mathbf{t}$ (т. е. $\mathbf{g}^2(x, \mathbf{a})$) является термом. Выражение $\mathbf{g}^2(x, \mathbf{a})$ имеет вид $\mathbf{\Phi}(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$, где $\mathbf{\Phi}$ есть $\mathbf{g}^2$ – двухместная предметно-функциональная константа, $\mathbf{t}_1$ есть x – терм (см. п. 2), $\mathbf{t}_2$ есть $\mathbf{a}$ – терм (см. п. 1). Поэтому, согласно п. 3, $\mathbf{g}^2(x, \mathbf{a})$ является термом. Значит, и выражение $\mathbf{f}^1(\mathbf{g}^2(x, \mathbf{a}))$ – терм.

Выражение $\mathbf{P}^1(\mathbf{g}^2(x, \mathbf{a}))$ не является термом, поскольку оно начинается не с предметно-функциональной, а с предикаторной константы. Выражение $\mathbf{h}^2(\mathbf{g}^2(x, \mathbf{a}))$ не является термом, так как оно начинается с двухместной предметно-функциональной константы $\mathbf{h}^2$, а в скобках после нее находится один терм $\mathbf{g}^2(x, \mathbf{a})$, а не два терма, как того требует п. 3 определения.

Поясним на примерах, каким образом осуществляется перевод имен естественного языка на язык логики предикатов.

Пусть простому имени «4» соответствует предметная константа $\mathbf{a}$, а простому имени «5» – константа $\mathbf{b}$, одноместному предметному функтору «$\surd$» сопоставим одноместную предметно-функциональную константу $\mathbf{f}^1$ (или просто $\mathbf{f}$), а двухместному функтору «+» – двухместную предметно-функциональную константу $\mathbf{g}^2$ (или просто $\mathbf{g}$). Тогда при переводе на язык логики предикатов сложным именам будут соответствовать следующие термы:

имени «$\sqrt{4}$» – терм $\mathbf{f}(\mathbf{a})$,
имени «4 + 5» – терм $\mathbf{g}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$,
имени «5 + 4» – терм $\mathbf{g}(\mathbf{b}, \mathbf{a})$,
имени «$\sqrt{4}\ + 5$» – терм $\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{a}), \mathbf{b})$,
имени «$\sqrt{4+5}$» – терм $\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$,
имени «(4 + 4) + (5 + 5)» – терм $\mathbf{g}(\mathbf{g}(\mathbf{a}, \mathbf{a}), \mathbf{g}(\mathbf{b}, \mathbf{b}))$.

Пусть теперь константа $\mathbf{a}$ сопоставлена простому имени «Москва», $\mathbf{b}$ – имени «Киев», $\mathbf{c}$ – «Россия», $\mathbf{d}$ – «Украина»; одноместному предметному функтору «столица» сопоставим символ $\mathbf{f}$, а двухместному функтору «расстояние от... до...» – символ $\mathbf{g}$. Тогда при переводе на язык логики предикатов сложным именам будут соответствовать следующие термы:

«столица России» – $\mathbf{f}(\mathbf{c})$,

«расстояние от Москвы до Киева» – **g**(**a**, **b**),
«расстояние от Москвы до столицы Украины» – **g**(**a**, **f**(**d**)),
«расстояние от столицы России до Киева» – **g**(**f**(**c**), **b**).

Другой тип правильно построенных выражений языка логики предикатов – формулы.

Определение формулы:

1. **Если П – *n*-местная предикаторная константа, а t_1,..., t_n – термы, то П(t_1,..., t_n) является формулой.**
2. **Если А – формула, то ¬А – формула.**
3. **Если А и В – формулы, то (А & В), (А ∨ В), (А ⊃ В) являются формулами.**
4. **Если А – формула, а α – предметная переменная, то ∀αА и ∃αА являются формулами.**
5. **Ничто иное не является формулой.**

Формулы, задаваемые пунктом 1 данного определения, называют *элементарными* или *атомарными*, а все остальные формулы – *сложными* или *молекулярными*.

Элементарной формулой является, например, выражение $\mathbf{P}^2(x, \mathbf{f}^1(\mathbf{a}))$, поскольку $\mathbf{P}^2$ – двухместная предикаторная константа, а в скобках после нее находятся два терма – x и $\mathbf{f}^1(\mathbf{a})$. Выражение $\mathbf{Q}^1(x, \mathbf{f}^1(\mathbf{a}))$ не является формулой, так как константа $\mathbf{Q}^1$ – одноместная и после нее в скобках должен стоять один, а не два терма. Выражение $\mathbf{P}^2(x, \mathbf{Q}^1(\mathbf{a}))$ также не относится к числу формул, так как $\mathbf{Q}^1(\mathbf{a})$ не есть терм.

Выражение $\forall x\mathbf{P}^2(x, \mathbf{f}^1(\mathbf{a}))$ является формулой согласно п. 4 определения, поскольку после кванторного символа ∀ находится предметная переменная x, а далее – формула $\mathbf{P}^2(x, \mathbf{f}^1(\mathbf{a}))$. Выражение $\forall \mathbf{a}\mathbf{P}^2(x, \mathbf{f}^1(\mathbf{a}))$ не есть формула, поскольку после ∀ стоит не предметная переменная, а предметная константа **a**. Выражение $\forall x\mathbf{g}^2(x, \mathbf{f}^1(\mathbf{a}))$ также не является формулой, так как после кванторного комплекса $\forall x$ находится терм $\mathbf{g}^2(x, \mathbf{f}^1(\mathbf{a}))$, а не формула.

Поясним на примерах, каким образом осуществляется перевод высказываний естественного языка на язык логики предикатов.

Начнем с высказываний, в которых содержатся утверждения об отдельных предметах и в состав которых не входят кванторные слова.

Простые высказывания, в которых утверждается наличие свойства у отдельного предмета, записываются в языке логики предикатов посредством формул вида $\mathbf{П}^1(\mathbf{t})$, где $\mathbf{t}$ есть терм, соответствующий имени предмета, а $\mathbf{П}^1$ – одноместная предикаторная константа, соответствующая знаку свойства. Например, переводом высказывания «Ромео – юноша» может быть формула $\mathbf{P}(\mathbf{a})$, где предметная константа $\mathbf{a}$ соответствует имени «Ромео», а одноместная предикаторная константа $\mathbf{P}$ – знаку свойства «юноша». Высказывание «Отец Ромео храбр» может быть записано в виде $\mathbf{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{a}))$, если одноместному предметному функтору «отец» сопоставить одноместную предметно-функциональную константу $\mathbf{f}$, а знаку свойства «храбрый» – одноместную предикаторную константу $\mathbf{Q}$.

Высказывания об отсутствии свойства у предмета переводятся на язык логики предикатов с помощью формул вида $\neg\mathbf{П}^1(\mathbf{t})$. Так, перевод высказывания «Отец Ромео не юноша» есть формула $\neg\mathbf{P}(\mathbf{f}(\mathbf{a}))$.

Высказывания, в которых утверждается наличие отношения между двумя предметами, записываются в виде формул $\mathbf{П}^2(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$, где $\mathbf{П}^2$ – двухместная предикаторная константа, соответствующая знаку двухместного отношения, а $\mathbf{t}_1$ и $\mathbf{t}_2$ – термы, соответствующие именам предметов. Например, высказывание «Ромео любит Джульетту» может быть записано в виде $\mathbf{R}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, где $\mathbf{R}$ соответствует двухместному предикатору «любит», а $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – именам «Ромео» и «Джульетта» соответственно. Переводом высказывания «Джульетта любит саму себя» будет формула $\mathbf{R}(\mathbf{b}, \mathbf{b})$, а переводом высказывания «Джульетта любит своего отца» – $\mathbf{R}(\mathbf{b}, \mathbf{f}(\mathbf{b}))$.

Высказывания, в которых отрицается наличие отношения между двумя предметами, выражаются с помощью формул вида $\neg\mathbf{П}^2(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$. Например, переводом высказывания «Отец Ромео не любит отца Джульетты» является $\neg\mathbf{R}(\mathbf{f}(\mathbf{a}), \mathbf{f}(\mathbf{b}))$.

Вообще, высказывания о наличии отношения между n предметами записываются в виде $\mathbf{П}^n(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2,..., \mathbf{t}_n)$, где $\mathbf{П}^n$ – n-местная предикаторная константа, соответствующая знаку n-местного отношения. Высказывания об отсутствии отношения между n предметами переводятся посредством формул вида $\neg\mathbf{П}^n(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2,..., \mathbf{t}_n)$.

Например, высказывание «Джульетта любит Ромео больше, чем своего отца» может быть записано в виде $\mathbf{R}_1(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{f}(\mathbf{b}))$, где $\mathbf{R}_1$ – трехместная предикаторная константа, соответствующая трехместному отношению «любит больше, чем».

Перейдем к формальной записи высказываний с кванторами.

Высказывания, в которых говорится о существовании объекта, удовлетворяющего некоторому условию, записываются в языке логики предикатов формулами вида $\exists\alpha\mathbf{A}(\alpha)$, где α – индивидная переменная, пробегающая по области объектов, о которых идет речь в высказывании, а формула $\mathbf{A}(\alpha)$ выражает утверждение о том, что α удовлетворяет условию $\mathbf{A}$.

Например, высказывание «Кто-то является храбрым» может быть переведено формулой $\exists x\mathbf{Q}(x)$, где $\mathbf{Q}$ – одноместная предикаторная константа, соответствующая предикатору «храбрый». Высказывание «Кто-то не является храбрым» может быть записано как $\exists x\neg\mathbf{Q}(x)$. Высказывание «Кто-то любит Джульетту» переводится с помощью формулы $\exists x\mathbf{R}(x, \mathbf{b})$, где $\mathbf{R}$ соответствует двухместному предикатору «любит», а $\mathbf{b}$ – имени «Джульетта». Высказывание «Джульетта любит кого-нибудь» может быть записано в виде $\exists x\mathbf{R}(\mathbf{b}, x)$, а высказывание «Кто-то не любит самого себя» – в виде $\exists x\neg\mathbf{R}(x, x)$.

Высказывания, в которых утверждается, что условию $\mathbf{A}$ удовлетворяет любой объект предметной области, переводятся на язык логики предикатов формулами вида $\forall\alpha\mathbf{A}(\alpha)$. Например, высказыванию «Все являются храбрецами» соответствует формула $\forall x\mathbf{Q}(x)$, высказыванию «Всякий любит Джульетту» – $\forall x\mathbf{R}(x, \mathbf{b})$, высказыванию «Никто не любит отца Ромео» – $\forall x\neg\mathbf{R}(x, \mathbf{f}(\mathbf{a}))$, высказыванию «Отец Ромео не любит никого» – $\forall x\neg\mathbf{R}(\mathbf{f}(\mathbf{a}), x)$.

Простые высказывания могут содержать в своем составе несколько кванторов. Поясним на примерах, каким образом осуществляются переводы на язык логики предикатов в подобных случаях.

Высказыванию «Каждый любит кого-нибудь» соответствует формула $\forall x\exists y\mathbf{R}(x, y)$; высказыванию «Кто-то кого-то не любит» – формула $\exists x\exists y\neg\mathbf{R}(x, y)$; высказыванию «Кто-то любит Ромео больше, чем кого бы то ни было» – формула $\exists x\forall y\mathbf{R}_1(x, \mathbf{a}, y)$.

В состав каждого из рассмотренных ранее высказываний входил только один предикатор – «юноша», «храбрый», «любит» или «любит больше, чем». Однако простые высказывания могут содержать несколько предикаторов. Как же осуществить их формальную запись?

Если подобное высказывание содержит квантор, то его переводом будет формула вида $\exists\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ или $\forall\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ с той лишь разницей, что условие $\mathbf{A}(\alpha)$ будет иметь более сложную структуру.

Начнем с формальной записи высказываний, содержащих два одноместных предикатора. Высказывание «Некоторый юноша храбр» может быть переведено на формальный язык посредством формулы $\exists x(\mathbf{P}(x)\ \&\ \mathbf{Q}(x))$. Ее буквальный смысл (с учетом того, что константам **P** и **Q** соответствуют предикаторы «юноша» и «храбрый») таков: «Существует объект x (человек), который является юношей и является храбрым». Это в точности соответствует смыслу исходного высказывания «Некоторый юноша храбр».

Высказывание «Всякий юноша храбр» может быть записано как $\forall x(\mathbf{P}(x) \supset \mathbf{Q}(x))$. Буквальное прочтение этой формулы – «Для всякого объекта x (человека) верно, что если он юноша, то он храбр» – также соответствует по смыслу исходному высказыванию.

Отрицательные высказывания «Некоторый юноша не храбр» и «Ни один юноша не храбр» могут быть переведены соответственно формулами $\exists x(\mathbf{P}(x)\ \&\ \neg\mathbf{Q}(x))$ и $\forall x(\mathbf{P}(x) \supset \neg\mathbf{Q}(x))$.

Рассмотрим теперь простые высказывания с одним одноместным и одним двухместным предикаторами.

Например, переводом высказывания «Некоторый юноша любит Джульетту» будет формула $\exists x(\mathbf{P}(x)\ \&\ \mathbf{R}(x, \mathbf{b}))$ – «Существует человек, такой что он является юношей и любит Джульетту».

Переводом высказывания «Джульетта любит какого-то юношу» является формула $\exists x(\mathbf{P}(x)\ \&\ \mathbf{R}(\mathbf{b}, x))$ – «Существует человек, такой что он является юношей и Джульетта любит его».

Переводом высказывания «Каждый юноша любит Джульетту» является формула $\forall x(\mathbf{P}(x) \supset \mathbf{R}(x, \mathbf{b}))$ – «Для всякого человека верно, что если он юноша, то он любит Джульетту».

Более трудными являются случаи, когда в состав высказываний об отношениях входят несколько одноместных предикаторов. Рассмотрим, например, высказывание «Всякий юноша любит какую-нибудь девушку». Как и раньше, предикаторам «юноша» и «любит» сопоставим константы **P** и **R**, а одноместному предикатору «девушка» сопоставим одноместную предикаторную константу **S**. Формальная запись нашего высказывания может иметь следующий вид: $\forall x(\mathbf{P}(x) \supset \exists y(\mathbf{S}(y)\ \&\ \mathbf{R}(x, y)))$. Буквальный смысл этой записи с учетом принятых обозначений – «Для всякого человека x верно, что если он юноша, то существует человек y, такой, что он девушка, и x любит y» – в точности соответствует смыслу исходного высказывания.

Высказывание «Некоторые юноши любят всякую девушку» может быть выражено формулой $\exists x(\mathrm{P}(x)\ \&\ \forall y(\mathrm{S}(y) \supset \mathrm{R}(x, y)))$ – «Существует человек x, такой, что он юноша, и для всякого человека y верно, что если y – девушка, то x любит y».

Переводом высказывания «Некоторые юноши не любят ни одной девушки» является формула $\exists x(\mathrm{P}(x)\ \&\ \forall y(\mathrm{S}(y) \supset \neg\mathrm{R}(x, y)))$.

Приведем еще несколько достаточно трудных примеров формальной записи простых высказываний естественного языка:

«Всякий храбрец является юношей или девушкой» –
$$\forall x(\mathrm{Q}(x) \supset (\mathrm{P}(x) \vee \mathrm{S}(x)));$$

«Всякая храбрая девушка не любит ни одного нехраброго юношу» –
$$\forall x((\mathrm{S}(x)\ \&\ \mathrm{Q}(x)) \supset \forall y((\mathrm{P}(y)\ \&\ \neg\mathrm{Q}(y)) \supset \neg\mathrm{R}(x, y)));$$

«Всякий юноша любит некоторую девушку больше, чем отца этой девушки» –
$$\forall x(\mathrm{P}(x) \supset \exists y(\mathrm{S}(y)\ \&\ \mathrm{R}_1(x, y, \mathrm{f}(y))));$$

«Некоторая девушка, отец которой храбр, любит его больше, чем некоторого нехраброго юношу» –
$$\exists x((\mathrm{S}(x)\ \&\ \mathrm{Q}(\mathrm{f}(x)))\ \&\ \exists y((\mathrm{P}(y)\ \&\ \neg\mathrm{Q}(y))\ \&\ \mathrm{R}_1(x, \mathrm{f}(x), y))).$$

Введем несколько *синтаксических* понятий, относящихся к языку логики предикатов.

Область действия квантора.

В формулах вида $\forall\alpha\mathrm{A}$ и $\exists\alpha\mathrm{A}$ формула A называется *областью действия квантора* ($\forall$ или $\exists$) *по переменной* α.

Например, в формуле $\forall x(\exists y\neg\mathrm{P}(x, y) \supset \mathrm{Q}(y, z))$ областью действия квантора $\forall$ по переменной x является формула $\exists y\neg\mathrm{P}(x, y) \supset \mathrm{Q}(y, z)$, а областью действия квантора $\exists$ по переменной y – формула $\neg\mathrm{P}(x, y)$.

$$\forall x(\exists y\neg\mathrm{P}(x, y) \supset \mathrm{Q}(y, z))$$

область действия квантора $\exists$ по y

область действия квантора $\forall$ по x

В произвольной формуле каждая предметная переменная встречается некоторое число раз (это число может быть равно 0, 1, 2 и т. д.). Иначе говоря, переменная имеет некоторое число *вхождений* в данную формулу. Например, в формулу $\forall x(\exists y \neg \mathbf{P}(x, y) \supset \mathbf{Q}(y, z))$ переменная x имеет два вхождения, y – три вхождения, z – одно вхождение, а остальные переменные – ни одного вхождения.

Свободные и *связанные вхождения переменных.*

Вхождение предметной переменной в некоторую формулу называется *связанным*, если оно следует непосредственно за квантором или же находится в области действия квантора по данной переменной. В противном случае вхождение переменной называется *свободным*.

Например, в формуле, указанной выше, первые вхождения переменных x и y связаны, поскольку они следуют непосредственно за кванторами $\forall$ и $\exists$. Второе вхождение x находится в области действия квантора $\forall$ по переменной x, т. е. в формуле $\exists y \neg \mathbf{P}(x, y) \supset \mathbf{Q}(y, z)$, а второе вхождение y расположено в области действия квантора $\exists$ по переменной y, т. е. в формуле $\neg \mathbf{P}(x, y)$, поэтому указанные вхождения являются связанными. Что же касается третьего вхождения переменной y и единственного вхождения z, то они являются свободными.

$\forall x(\exists y \neg \mathbf{P}(x, y) \supset \mathbf{Q}(y, z))$

свободные вхождения переменных

связанные вхождения переменных

Свободные и связанные переменные.

Предметная переменная называется *свободной* в некоторой формуле, если существует (по крайней мере одно) ее свободное вхождение в эту формулу. Переменная называется *связанной* в формуле, если существует (по крайней мере одно) ее связанное вхождение в эту формулу.

Например, в рассматриваемой формуле свободными являются переменные y и z, а связанными – переменные x и y. Обратим внимание на то, что одна и та же переменная может быть и свободной, и связанной в некоторой формуле. В нашем примере такой переменной является y, которая имеет как свободное, так и связанное вхождение в указанную формулу.

Местность терма.

***Местность терма* есть число входящих в него различных предметных переменных.**

Замкнутые термы.

Терм, не содержащий в своем составе предметных переменных, называется *замкнутым*.

Например, терм $\mathbf{f}(x, y, z)$ является трехместным, так как число различных переменных в его составе равно трем, термы $\mathbf{f}(x, \mathbf{b}, z)$ и $\mathbf{f}(x, y, y)$ – двухместные, терм $\mathbf{f}(x, \mathbf{b}, \mathbf{a})$ – одноместный, а $\mathbf{f}(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a})$ – нульместный, т. е. замкнутый терм.

Местность формулы.

***Местность формулы* языка логики предикатов первого порядка есть число входящих в нее различных свободных предметных переменных.**

Замкнутые формулы.

Формула, не содержащая в своем составе свободных переменных, называется *замкнутой*.

Формула $\forall x(\exists y \neg \mathbf{P}(x, y) \supset \mathbf{Q}(y, z))$ является двухместной, поскольку она содержит две различные свободные переменные – y и z, а формула $\exists z \forall x(\exists y \neg \mathbf{P}(x, y) \supset \forall y \mathbf{Q}(y, z))$ не имеет ни одной свободной переменной, поэтому она нульместная, т. е. замкнутая.

Результатом перевода любого имени естественного языка на язык логики предикатов является именно замкнутый терм, а результатом перевода произвольного высказывания – замкнутая формула. Поэтому замкнутые формулы также называют *предложениями* формализованных языков.

Сформулированный в этом параграфе язык логики предикатов называют *первопорядковым.* Смысл такого названия, как уже говорилось, состоит в следующем: в данном языке разрешается связывать кванторами (квантифицировать) переменные единственного типа – предметные переменные, т. е. переменные, возможными значениями которых являются предметы, индивиды.

Однако первопорядковый язык можно обогатить за счет введения других переменных, например предметно-функциональных (пробегающих по множеству предметных функций) и предикаторных (принимающих значения во множестве свойств и отношений). Разрешив квантификацию указанных переменных, мы получим *язык логики предикатов более высокого, чем первый, порядка.*

Языки данного типа имеют бóльшие выразительные возможности по сравнению с первопорядковым. С их помощью можно воспроизводить логические формы высказываний, невыразимые в первопорядковом языке. Например, логическая форма высказывания «Некоторые свойства Земли присущи и Марсу» может быть выражена в языке более высокого порядка следующим образом: $\exists \boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(\mathbf{a})\ \&\ \boldsymbol{P}(\mathbf{b}))$, где $\boldsymbol{P}$ – предикаторная переменная, пробегающая по множеству свойств, а предметным константам **a** и **b** соответствуют имена «Земля» и «Марс».

Язык логики предикатов первого порядка может быть модифицирован и иным образом. В списке нелогических символов его алфавита сохраняются лишь предметные переменные. Вместо же предметных констант в язык вводят некоторое число конкретных имен, вместо предметно-функциональных констант – некоторое число предметных функторов, а вместо предикаторных констант – некоторое число предикаторов естественного языка. Правила образования термов и формул сохраняются с той лишь разницей, что там, где ранее речь шла о параметрах определенных типов, теперь имеются в виду нелогические термины естественного языка соответствующих категорий.

В результате указанной модификации получается так называемый *язык прикладной первопорядковый логики предикатов.* Этот язык не предназначен для фиксации логических форм высказываний естественного языка, поскольку он содержит не параметры имен, предметных функторов и предикаторов, а сами эти термины. В рамках прикладного языка логики предикатов можно стандартным и точным образом представлять информацию, которую содержат высказывания естественного языка, так как повествовательные предложения, будучи переведенными в данный язык, приобретают жесткую логическую структуру и не допускают различных трактовок своего логического содержания.

Приведем примеры записи высказываний естественного языка в прикладном языке логики предикатов:

«Всякий человек смертен» –
$\forall x$(Человек(x) $\supset$ Смертен(x));
«Температура Солнца выше температуры Земли» –
Выше чем(Температура(Солнце), Температура(Земля));
«Всякий студент изучает какую-нибудь науку» –
$\forall x$(Студент(x) $\supset \exists y$(Наука(y) & Изучает(x, y)));
«Квадрат любого четного числа больше 1» –
$\forall x$(Четное число(x) $\supset$ Больше(Квадрат(x), 1)).

Для языка логики предикатов характерно префиксное употребление предметно-функциональных символов в сложных термах и предикаторных символов в атомарных формулах. Иначе говоря, предметно-функциональный символ $\mathbf{\Phi}^n$ располагается в начале терма $\mathbf{\Phi}^n(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2,..., \mathbf{t}_n)$, а предикаторный символ $\mathbf{\Pi}^n$ располагается в начале формулы $\mathbf{\Pi}^n(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2,..., \mathbf{t}_n)$. В естественном языке префиксное употребление предметных функторов и предикаторов встречается достаточно редко. Поэтому прикладной язык логики предикатов может быть приближен к естественному языку за счет отказа от обязательного префиксного использования предметно-функциональных и предикаторных знаков.

Например, запись «Квадрат($\mathbf{t}$)» может быть заменена на более привычную – «$\mathbf{t}^2$», запись «Четное число ($\mathbf{t}$)» – на «$\mathbf{t}$ – четное число», запись «Больше ($\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$)» – на «$\mathbf{t}_1 > \mathbf{t}_2$». Тогда перевод высказывания «Квадрат любого четного числа больше 1» будет выглядеть так:

$$\forall x(x \text{ – четное число} \supset x^2 > 1).$$

Приступим к формулировке в рамках построенного формализованного языка логической теории – *классической логики предикатов первого порядка.*

§2. Интерпретации и модели. Общезначимые формулы и логические отношения в логике предикатов

При изложении классической логики высказываний мы выделили несколько этапов в семантическом построении логических теорий:

(1) задание правил интерпретации нелогических символов языка;
(2) придание точных значений логическим символам и формулировка условий истинности и ложности формул;
(3) введение понятия закона логической теории – общезначимой формулы (формулы, принимающей значение «истина» при любой интерпретации нелогических символов);
(4) определение основных логических отношений между формулами в теории, в частности отношения логического следования.

Построение классической логики предикатов первого порядка будет осуществляться по тому же сценарию.

На первом этапе необходимо задать *класс допустимых интерпретаций нелогических символов* языка. Суть данной процедуры – указать, объекты каких типов могут быть сопоставлены в качестве значений нелогическим символам различных категорий. Например, в классической логике высказываний каждой пропозициональной переменной может быть сопоставлен только один из двух абстрактных объектов – «истина» или «ложь».

Нелогические символы логики предикатов первого порядка можно подразделить на две группы. К первой относятся *константы* (предметные, предметно-функциональные и предикаторные). Они выступают в качестве параметров определенных терминов естественного языка и не могут связываться кванторами. Вторую группу составляют *переменные*. В первопорядковом языке имеется только один их тип – предметные (индивидные) переменные. Они могут связываться кванторами, а их свободные вхождения не являются, с содержательной точки зрения, параметрами конкретных имен, а выполняют скорее функцию неопределенных местоимений, которые можно заменять разными именами.

Отмеченные различия констант и переменных существенно учитываются при построении логики предикатов. Интерпретация нелогических символов осуществляется таким образом, что при зафиксированных значениях констант допускается варьирование значений предметных переменных.

Процедуре интерпретации нелогических символов языка логики предикатов предшествует выбор некоторого непустого множества **U**, которое называют *областью интерпретации* или *универсумом рассмотрения* (*рассуждения*).

Условие непустоты множества **U** (т. е. наличие в нем по крайней мере одного элемента) является единственным требованием, предъявляемым к области интерпретации в классической логике предикатов. Таким образом, в этой теории в качестве исходной предметной области может выступать произвольное непустое множество (например, множество натуральных чисел, множество людей, множество городов, множество химических элементов и т. д.).

Интерпретация нелогических символов в логике предикатов релятивизируется относительно некоторого наперед выбранного универсума **U**. В качестве значений этим символам могут сопоставляться лишь объекты, заданные каким-либо образом на данном универсуме.

Приписывание значений нелогическим константам языка может быть осуществлено с помощью особой семантической функции **I**, называемой *интерпретационной функцией*.

Функция **I** сопоставляет каждой нелогической константе некоторый объект, заданный на области интерпретации **U**, причем константам различных категорий должны сопоставляться объекты различных типов. Отметим, что в процессе интерпретации любая константа формализованного языка должна приобрести значения того же типа, что и любое выражение соответствующей категории естественного языка. Поэтому функция **I** задается таким образом, что значения предметных констант оказываются однотипными со значениями имен, значения предметно-функциональных констант – со значениями предметных функторов, а значения предикаторных констант – со значениями предикаторов.

Интерпретация предметных констант. Предметные константы, как уже говорилось, – это параметры имен естественного языка. Значениями имен являются отдельные предметы, индивиды. Поэтому предметным константам в качестве значений также должны приписываться индивиды, но не любые, а те, которые содержатся во множестве **U**. Так, если **U** есть множество людей, то функция **I** может приписать в качестве значения предметной константе **a**, например, Аристотеля, а константе **b** – также Аристотеля или какого-либо другого человека, скажем Сократа. Таким образом:

Функция I сопоставляет каждой предметной константе k произвольный элемент множества U, т. е.

$$\mathbf{I(k) \in U},$$

где «∈» – знак отношения принадлежности элемента множеству.

Интерпретация предикаторных констант. Предикаторные константы являются параметрами предикаторов естественного языка. Выше отмечалось, что значениями предикаторов можно считать множества (классы) объектов, причем элементами множеств, представляемых одноместными предикаторами, являются индивиды; двухместными предикаторами – пары индивидов; трехместными предикаторами – тройки индивидов и т. д. Предикаторным константам в логике предикатов приписываются значения того же типа, только это приписывание релятивизируется относительно выбранной области интерпретации **U**.

Одноместной предикаторной константе функция **I** сопоставляет произвольное множество (возможно пустое) элементов универсума **U**, т. е. значением одноместной предикаторной константы является некоторое подмножество множества **U**.

Так, если **U** есть класс городов, то константе $\mathbf{P}^1$ функция **I** может приписать, скажем, 1) пустое множество (например, множество городов, расположенных на северном полюсе), 2) множество российских городов, 3) множество городов с населением более 1 млн. человек и даже 4) множество всех городов (ведь любое множество является подмножеством самого себя).

Двухместной предикаторной константе функция **I** сопоставляет произвольное множество пар, состоящих из элементов **U**. Множество всех пар, в состав которых входят элементы **U**, называется *второй декартовой степенью* (или декартовым квадратом) множества **U** и обозначается $\mathbf{U}^2$. Таким образом, значением двухместной предикаторной константы при интерпретации **I** является произвольное (возможно пустое) подмножество $\mathbf{U}^2$.

Если **U** есть класс городов, то константе $\mathbf{Q}^2$ может быть сопоставлено, например, 1) множество таких пар городов, первый из которых расположен севернее второго, 2) множество таких пар городов, первый из которых превосходит по населению второй. Пара городов <Санкт-Петербург, Москва> принадлежит первому из указанных множеств, поскольку Санкт-Петербург действительно расположен севернее Москвы, но не принадлежит второму множеству, так как Санкт-Петербург не превосходит по населению Москву. Что же касается другой пары <Москва, Санкт-Петербург>, то она, наоборот, принадлежит второму множеству, но не принадлежит первому.

Трехместной предикаторной константе сопоставляется некоторое множество троек, состоящих из элементов области интерпретации **U**. Иначе говоря, значением такой константы является произвольное подмножество множества всех троек, составленных из элементов **U**. Указанное множество называют *третьей декартовой степенью множества* **U** и обозначают $\mathbf{U}^3$.

Например, предикаторной константе $\mathbf{R}^3$ в случае, если **U** – класс городов, может быть сопоставлено множество таких троек городов, первый из которых расположен между вторым и третьим. В состав данного множества войдет, скажем, тройка <Москва, Киев, Новгород>, поскольку Москва расположена между Киевом и Новгородом, но не войдет тройка <Киев, Москва, Новгород>, ведь Киев не расположен между Москвой и Новгородом.

В общем случае значением *n*-местной предикаторной константы будет некоторый подкласс множества $\mathbf{U}^n$ (*n-ной декартовой степени* **U**) , которое представляет собой класс всевозможных *n*-ок, составленных из элементов **U**:

Каждой *n*-местной предикаторной константе Π^n функция I сопоставляет в качестве значения произвольное множество *n*-членных последовательностей, состоящих из элементов универсума U, т. е.

$$\mathbf{I}(\mathbf{\Pi}^n) \subseteq \mathbf{U}^n,$$

где «$\subseteq$» – знак включения одного множества в другое. Полагается, что первая декартова степень **U** (т. е. $\mathbf{U}^1$) есть само множество **U**.

Интерпретация предметно-функциональных констант. Предметно-функциональные константы – это параметры предметных функторов естественного языка. Последние репрезентируют (представляют) функции, аргументами и значениями которых являются индивиды. Поэтому в логике предикатов при интерпретации предметно-функциональных констант им также будут сопоставляться предметные функции соответствующей местности, только релятивизированные относительно универсума рассмотрения **U**, т. е. аргументами и значениями указанных функций будут являться элементы множества **U**. Такого рода функции принято называть *операциями, заданными на множестве* **U**.

Если в качестве универсума **U** выбрано множество натуральных чисел, то одноместной предметно-функциональной константе $\mathbf{f}^1$ интерпретационная функция **I** может, например, сопоставить операцию возведения в квадрат, поскольку эта операция, во-первых, является одноместной и, во-вторых, ее можно задать на множестве натуральных чисел, так как квадрат любого натурального числа сам является числом натуральным.

При том же универсуме двухместной предметно-функциональной констáнте $\mathbf{g}^2$ может быть сопоставлена операция сложения, поскольку она является двухместной и сумма любых двух натуральных чисел есть натуральное число. Итак:

Каждой *n*-местной предметно-функциональной константе $\mathbf{\Phi}^n$ интерпретационная функция I сопоставляет произвольную *n*-местную функцию, аргументами и значениями которой являются элементы множества U, т. е.

$\mathbf{I}(\mathbf{\Phi}^n)$ есть *n*-местная операция на универсуме U.

Описание процедуры интерпретации нелогических констант языка классической логики предикатов завершено. Для ее осуществления, как мы видели, необходимо было выбрать некоторый универсум рассмотрения **U** и функцию **I**, сопоставляющую каждой константе значение в соответствии со сформулированными правилами. Пару <**U**, **I**>, задающую допустимую в данной логической теории интерпретацию нелогических констант, принято называть *моделью* или *возможной реализацией языка*.

***Моделью* (*возможной реализацией языка*) называется любая пара π = <U, I>, такая что U – непустое множество, а I – функция, удовлетворяющая следующим условиям:**

(1) $\mathbf{I}(\mathbf{k}) \in \mathbf{U}$,

(2) $\mathbf{I}(\mathbf{\Pi}^n) \subseteq \mathbf{U}^n$,

(3) $\mathbf{I}(\mathbf{\Phi}^n)$ есть *n*-местная операция, заданная на U,

где **k** – произвольная предметная константа, $\mathbf{\Pi}^n$ – произвольная *n*-местная предикаторная константа, а $\mathbf{\Phi}^n$ – произвольная *n*-местная предметно-функциональная константа.

Интерпретация предметных переменных. Рассмотрим далее, как сопоставляются значения остальным нелогическим символам языка, а именно предметным переменным. Эта процедура также релятивизирована относительно универсума **U** и осуществляется с помощью особой семантической функции φ, *приписывающей значения предметным переменным.*

Каждой предметной переменной в качестве значения функция φ приписывает произвольный элемент множества U, т. е.

$$\varphi(\alpha) \in \mathbf{U},$$

где α – произвольная предметная переменная.

Обратим внимание, что с одной и той же моделью π = <**U**, **I**>, если **U** содержит более одного элемента, можно связать бесконечное число различных приписываний значений предметным переменным. Иначе говоря, в указанных случаях имеется бесконечно много различных функций φ, φ', φ'', φ'''... приписывания значений предметным переменным (две такие функции считаются различными, если они хотя бы одной переменной приписывают разные значения). Отмеченное обстоятельство обеспечивает возможность варьировать значения переменных при фиксированной интерпретации констант.

Второй этап в построении логики предикатов – задание правил, позволяющих устанавливать значения термов и формул всевозможных типов. Эти значения обусловлены выбором конкретной модели (возможной реализации) π = <**U**, **I**> и конкретного приписывания элементов **U** предметным переменным (т. е. выбором функции φ). Возможными значениями термов являются индивиды из области интерпретации **U**, а возможными значениями формул – оценки «истина» и «ложь». Данный факт свидетельствует о том, что, с семантической точки зрения, термы выступают в качестве аналогов имен, а формулы – аналогов предложений естественного языка.

Правила приписывания значений термам. Покажем, как можно определить значение некоторого терма **t** в произвольной модели π = <**U**, **I**> при некотором приписывании значений предметным переменным φ. Будем употреблять запись «$|\mathbf{t}|_\varphi$» как сокращение выражения «*значение терма* **t** *в модели* π *при приписывании* φ».

Согласно определению терма (см. §1 данной главы), $\mathbf{t}$ является либо 1) некоторой предметной константой $\mathbf{k}$, либо 2) некоторой предметной переменной α, либо 3) сложным выражением вида $\mathbf{\Phi^n(t_1, t_2,..., t_n)}$, где $\mathbf{\Phi^n}$ – *n*-местная предметно-функциональная константа, а $\mathbf{t_1, t_2,..., t_n}$ – термы. Сформулируем правила установления значения терма $\mathbf{t}$ для каждого из этих трех случаев.

(T1) Если терм t есть предметная константа k, то его значением в модели π при приписывании φ является тот индивид, который интерпретационная функция I сопоставляет константе k, т. е.

$$|\mathbf{k}|_\varphi = \mathbf{I(k)}.$$

(T2) Если терм t есть предметная переменная α, то его значением в π при приписывании φ является тот индивид, который сопоставляется переменной α посредством φ, т. е.

$$|\alpha|_\varphi = \varphi(\alpha).$$

(T3) Пусть t есть сложный терм $\Phi^n(t_1, t_2,..., t_n)$. Для того чтобы установить его значение в модели π при приписывании φ, необходимо: во-первых, выделить операцию, которую функция I сопоставляет предметно-функциональной константе Φ^n, т. е. найти $I(\Phi^n)$; во-вторых, установить значения термов $t_1, t_2,..., t_n$ в той же модели при том же приписывании, т. е. найти $|t_1|_\varphi$, $|t_2|_\varphi,..., |t_n|_\varphi$; и в-третьих, применить операцию $I(\Phi^n)$ к аргументам $|t_1|_\varphi, |t_2|_\varphi,..., |t_n|_\varphi$. Результат применения данной операции к указанным объектам как раз и будет значением сложного терма $\Phi^n(t_1, t_2,..., t_n)$ в π = $<U, I>$ при приписывании φ. Таким образом,

$$|\mathbf{\Phi^n(t_1, t_2,..., t_n)}|_\varphi = [\mathbf{I(\Phi^n)}](|\mathbf{t_1}|_\varphi, |\mathbf{t_2}|_\varphi,..., |\mathbf{t_n}|_\varphi).$$

Приведем примеры установления значений термов в конкретной модели при конкретном приписывании значений предметным переменным. Пусть область интерпретации **U** есть множество целых положительных чисел. Пусть интерпретационная функция **I** сопоставляет константе **a** число 2, одноместной предметно-функциональной константе **f** – операцию возведения в квадрат, а двухместной предметно-функциональной константе **g** – операцию сложения. Пусть также предметной переменной y функция φ приписывает значение 1, т. е. $\varphi(y) = 1$. Определим, какие значения в данной модели $\pi = \langle \mathbf{U}, \mathbf{I} \rangle$ и при указанном приписывании φ принимают следующие термы: (а) **a**; (б) y; (в) **f**(**a**); (г) **g**(y, **a**); (д) **f**(**g**(y, **a**)); (е) **g**(**f**(**a**), y).

(а) Поскольку **a** – предметная константа, значением этого терма, согласно пункту (**Т1**), является объект, сопоставленный функцией **I** константе **a**, т. е. число 2. Итак, $|\mathbf{a}|_\varphi = \mathbf{I}(\mathbf{a}) = 2$.

(б) Поскольку y – предметная переменная, то ее значением, согласно пункту (**Т2**), является объект, который φ приписывает переменной y, т. е. число 1. Таким образом, $|y|_\varphi = \varphi(y) = 1$.

(в) Установим значение сложного терма **f**(**a**). Предметно-функциональной константе **f** в нашей модели сопоставлена операция возведения в квадрат; значением терма **a**, как было показано в примере (а), является 2. Действуя в соответствии с пунктом (**Т3**), мы должны применить операцию **I**(**f**) к аргументу $|\mathbf{a}|_\varphi$, т. е. возвести в квадрат число 2. Полученное в результате этого число 4 является искомым значением терма **f**(**a**). Таким образом, $|\mathbf{f}(\mathbf{a})|_\varphi = [\mathbf{I}(\mathbf{f})](|\mathbf{a}|_\varphi) = 2^2 = 4$.

(г) Установим значение сложного терма **g**(y, **a**). Предметно-функциональной константе **g** в нашей модели сопоставлена операция сложения. Значениями термов y и **a**, как было показано в примерах (б) и (а), являются, соответственно, числа 1 и 2. Чтобы вычислить значение **g**(y, **a**), мы должны, согласно пункту (**Т3**), применить операцию **I**(**g**) к аргументам $|y|_\varphi$ и $|\mathbf{a}|_\varphi$, т. е. сложить 1 и 2. В результате получим число 3 – значение терма **g**(y, **a**). Итак, $|\mathbf{g}(y, \mathbf{a})|_\varphi = [\mathbf{I}(\mathbf{g})](|y|_\varphi, |\mathbf{a}|_\varphi) = 1+2 = 3$.

(д) Для того чтобы установить значение терма **f**(**g**(y, **a**)), необходимо применить операцию **I**(**f**), т. е. операцию возведения в квадрат, к объекту $|\mathbf{g}(y, \mathbf{a})|_\varphi$. Но значением **g**($y$, **a**), как было показано в примере (г), является число 3. Поэтому возводим в квадрат число 3 и получаем число 9, которое и является значением терма **f**(**g**(y, **a**)).

(е) Для определения значения терма **g**(**f**(**a**), y) надо сложить значения термов **f**(**a**) и y, т. е. числа 4 и 1 (см. примеры (в) и (б)). Таким образом, значением **g**(**f**(**a**), y) будет 4 + 1, т. е. число 5.

Правила приписывания значений формулам. Значениями формул в модели π при произвольном приписывании φ являются объекты «истина» и «ложь». В дальнейшем в качестве сокращения для выражения «*значение формулы* **F** *в модели* π *при приписывании значений предметным переменным* φ» будем использовать запись «$|\mathbf{F}|_\varphi$». Указание на приписывание φ здесь особенно важно, поскольку при установлении истинности или ложности формул вида $\forall\alpha\mathbf{A}$ и $\exists\alpha\mathbf{A}$ приходится определять значения их подформул, варьируя приписывания значений предметным переменным. Процедура установления значений формул (так же, как и подобная процедура для термов) будет осуществляться в рамках одной и той же возможной реализации, поэтому в записи «$|\mathbf{F}|_\varphi$» снова опускается параметр модели π.

Формулы, в соответствии с их определением (см. §1 данной главы), можно разбить на три группы: (i) элементарные формулы – выражения вида $\mathbf{\Pi^n(t_1, t_2,..., t_n)}$, где $\mathbf{\Pi^n}$ – n-местная предикаторная константа, а $\mathbf{t_1, t_2,..., t_n}$ – термы; (ii) сложные формулы, главным знаком которых является пропозициональная связка, – это выражения видов $\neg\mathbf{A}$, $(\mathbf{A} \,\&\, \mathbf{B})$, $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$ и $(\mathbf{A} \supset \mathbf{B})$, где **A** и **B** – формулы; (iii) сложные формулы, главным знаком которых является квантор, – это выражения видов $\forall\alpha\mathbf{A}$ и $\exists\alpha\mathbf{A}$, где α – предметная переменная, а **A** – формула.

Покажем, каким образом устанавливаются значения формул каждой из трех групп.

(i) *Условия истинности и ложности элементарных формул.* Чтобы установить значение элементарной формулы $\mathbf{\Pi^n(t_1, t_2,..., t_n)}$ в модели $\pi = \langle\mathbf{U}, \mathbf{I}\rangle$ при приписывании φ, необходимо: во-первых, выяснить, какое именно подмножество множества $\mathbf{U^n}$ сопоставляется предикаторной константе $\mathbf{\Pi^n}$, т. е. найти $\mathbf{I(\Pi^n)}$; во-вторых, определить, какие значения принимают в данной модели при данном приписывании термы $\mathbf{t_1, t_2,..., t_n}$, т. е. найти $|\mathbf{t_1}|_\varphi, |\mathbf{t_2}|_\varphi,..., |\mathbf{t_n}|_\varphi$; и наконец установить, является ли последовательность $\langle\mathbf{t_1}|_\varphi, |\mathbf{t_2}|_\varphi,..., |\mathbf{t_n}|_\varphi\rangle$ элементом множества $\mathbf{I(\Pi^n)}$. Если данная последовательность принадлежит ему, то формула $\mathbf{\Pi^n(t_1, t_2,..., t_n)}$ принимает значение «истина», в противном случае она примет значение «ложь». Таким образом,

$$\textbf{(F1)}\quad |\mathbf{\Pi^n(t_1, t_2,..., t_n)}|_\varphi = \textit{и} \;\Leftrightarrow\; \langle|\mathbf{t_1}|_\varphi, |\mathbf{t_2}|_\varphi,..., |\mathbf{t_n}|_\varphi\rangle \in \mathbf{I(\Pi^n)},$$
$$|\mathbf{\Pi^n(t_1, t_2,..., t_n)}|_\varphi = \textit{л} \;\Leftrightarrow\; \langle|\mathbf{t_1}|_\varphi, |\mathbf{t_2}|_\varphi,..., |\mathbf{t_n}|_\varphi\rangle \notin \mathbf{I(\Pi^n)},$$

где «$\Leftrightarrow$» – метаязыковая эквиваленция («если и только если»).

Для разъяснения данного определения рассмотрим конкретную модель π = <**U**, **I**> и конкретное приписывание предметным переменным φ, которые использовались ранее в примерах (а)–(е). Договоримся, что одноместной предикаторной константе **P** интерпретационная функция **I** сопоставляет множество четных чисел, а двухместной предикаторной константе **Q** – множество таких пар целых положительных чисел, первое из которых больше второго.

Определим, какие значения в π при φ принимают элементарные формулы (ж) **Q**(**f**(**a**), *y*) и (з) **P**(**g**(*y*, **a**)).

(ж) Чтобы установить значение формулы **Q**(**f**(**a**), *y*) в данной модели при данном приписывании, необходимо, согласно (**F1**), ответить на вопрос, принадлежит ли пара $<|\mathbf{f}(\mathbf{a})|_\varphi, |y|_\varphi>$ множеству **I**(**Q**). В примерах (в) и (б) было установлено, что значениями термов **f**(**a**) и *y* при приписывании φ являются, соответственно, числа 4 и 1. В данной модели **I**(**Q**) есть множество таких пар чисел, первое из которых больше второго. Пара <4, 1> принадлежит этому множеству, так как 4 больше 1. Поэтому $|\mathbf{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{a}), y)|_\varphi = \boldsymbol{u}$.

(з) Для установления значения формулы **P**(**g**(*y*, **a**)) следует выяснить, принадлежит ли значение терма **g**(*y*, **a**) множеству **I**(**P**). В примере (г) было показано, что $|\mathbf{g}(y, \mathbf{a})|_\varphi = 3$. В нашей модели **I**(**P**) есть множество четных чисел. Поскольку число 3 не принадлежит этому множеству, формула **P**(**g**(*y*, **a**)) примет значение *л* в π при приписывании φ.

(ii) *Условия истинности и ложности формул, главным знаком которых является пропозициональная связка.* Значения сложных формул видов ¬**A**, (**A** & **B**), (**A** ∨ **B**) и (**A** ⊃ **B**) в произвольной модели при произвольном приписывании значений предметным переменным обусловлены тем, какие значения в той же модели при том же приписывании принимают подформулы **A** и **B**. Таким образом, установив значения формул **A** и **B** в модели π при приписывании φ, мы можем однозначно определить, какими – истинными или ложными – в этой модели при этом же приписывании являются формулы ¬**A**, (**A** & **B**), (**A** ∨ **B**) и (**A** ⊃ **B**).

Сформулируем условия истинности и ложности формул указанных типов, опираясь на смысл пропозициональных связок ¬, &, ∨, ⊃, зафиксированный в предыдущей главе.

(F2) $|\neg \mathbf{A}|_\varphi = \textit{и} \Leftrightarrow |\mathbf{A}|_\varphi = \textit{л}$.
$|\neg \mathbf{A}|_\varphi = \textit{л} \Leftrightarrow |\mathbf{A}|_\varphi = \textit{и}$.

(F3) $|\mathbf{A} \,\&\, \mathbf{B}|_\varphi = \textit{и} \Leftrightarrow |\mathbf{A}|_\varphi = \textit{и}$ и $|\mathbf{B}|_\varphi = \textit{и}$.
$|\mathbf{A} \,\&\, \mathbf{B}|_\varphi = \textit{л} \Leftrightarrow |\mathbf{A}|_\varphi = \textit{л}$ или $|\mathbf{B}|_\varphi = \textit{л}$.

(F4) $|\mathbf{A} \vee \mathbf{B}|_\varphi = \textit{и} \Leftrightarrow |\mathbf{A}|_\varphi = \textit{и}$ или $|\mathbf{B}|_\varphi = \textit{и}$.
$|\mathbf{A} \vee \mathbf{B}|_\varphi = \textit{л} \Leftrightarrow |\mathbf{A}|_\varphi = \textit{л}$ и $|\mathbf{B}|_\varphi = \textit{л}$.

(F5) $|\mathbf{A} \supset \mathbf{B}|_\varphi = \textit{и} \Leftrightarrow |\mathbf{A}|_\varphi = \textit{л}$ или $|\mathbf{B}|_\varphi = \textit{и}$.
$|\mathbf{A} \supset \mathbf{B}|_\varphi = \textit{л} \Leftrightarrow |\mathbf{A}|_\varphi = \textit{и}$ и $|\mathbf{B}|_\varphi = \textit{л}$.

Покажем теперь в качестве примера, каким образом в заданной выше конкретной модели $\pi = \langle \mathbf{U}, \mathbf{I} \rangle$ и при конкретном приписывании φ устанавливаются значения формул: (и) $\mathbf{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{a}), y) \vee \mathbf{P}(\mathbf{g}(y, \mathbf{a}))$; (к) $\neg(\mathbf{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{a}), y) \vee \mathbf{P}(\mathbf{g}(y, \mathbf{a})))$; (л) $\mathbf{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{a}), y) \supset \mathbf{P}(\mathbf{g}(y, \mathbf{a}))$.

(и) Чтобы установить значение дизъюнктивной формулы $\mathbf{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{a}), y) \vee \mathbf{P}(\mathbf{g}(y, \mathbf{a}))$ в модели π при φ, необходимо знать значение ее подформул $\mathbf{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{a}), y)$ и $\mathbf{P}(\mathbf{g}(y, \mathbf{a}))$. В примере (ж) было показано, что $|\mathbf{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{a}), y)|_\varphi = \textit{и}$, а в примере (з) – что $|\mathbf{P}(\mathbf{g}(y, \mathbf{a}))|_\varphi = \textit{л}$. Поскольку одна из двух формул принимает в π при φ значение *и*, постольку, согласно (**F4**), и вся дизъюнктивная формула истинна в этой модели при этом приписывании, т. е. $|\mathbf{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{a}), y) \vee \mathbf{P}(\mathbf{g}(y, \mathbf{a}))|_\varphi = \textit{и}$.

(к) Чтобы определить, какое значение в π при φ принимает формула $\neg(\mathbf{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{a}), y) \vee \mathbf{P}(\mathbf{g}(y, \mathbf{a})))$, нужно знать значение ее подформулы, стоящей за знаком отрицания. Как показано в примере (и), эта подформула истинна в π при φ. Поэтому, согласно (**F2**), ее отрицание примет значение *л*, значит $|\neg(\mathbf{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{a}), y) \vee \mathbf{P}(\mathbf{g}(y, \mathbf{a})))|_\varphi = \textit{л}$.

(л) Установим значение в π при φ импликативной формулы $\mathbf{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{a}), y) \supset \mathbf{P}(\mathbf{g}(y, \mathbf{a}))$. Ранее показано, что ее антецедент $\mathbf{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{a}), y)$ является истинным, а консеквент $\mathbf{P}(\mathbf{g}(y, \mathbf{a}))$ – ложным. Поэтому, согласно (**F5**), сложная формула примет значение *л*, т. е. $|\mathbf{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{a}), y) \supset \mathbf{P}(\mathbf{g}(y, \mathbf{a}))|_\varphi = \textit{л}$.

(iii) *Условия истинности и ложности формул, главным знаком которых является квантор.* С содержательной точки зрения, выражение вида $\forall\alpha\mathbf{A}$ следует считать истинным, если каждый индивид предметной области удовлетворяет условию, выраженному в **A**. Если же в предметной области существует индивид, не удовлетворяющий данному условию, то $\forall\alpha\mathbf{A}$ окажется ложным. Что же касается утверждений вида $\exists\alpha\mathbf{A}$, то их естественно считать истинными в том случае, когда существует индивид, удовлетворяющий выраженному в **A** условию, и ложными, если каждый индивид ему не удовлетворяет.

В логике предикатов условия истинности и ложности формул $\forall\alpha\mathbf{A}$ и $\exists\alpha\mathbf{A}$ в модели π при φ определяются сходным образом. Для того чтобы установить значения этих формул, осуществляется перебор (просмотр) индивидов из универсума **U**. Он производится путем варьирования значения переменной α, т. е. рассматриваются все возможные приписывания ψ, сопоставляющие переменной α различные элементы **U**, но сохраняющие неизменными (как при исходном φ) значения других предметных переменных. Осуществляя разные приписывания подобного рода, устанавливают, какой – истинной или ложной – в каждом из этих случаев оказывается формула **A**.

Если **A** оказывается истинной, какой бы индивид из **U** мы ни приписывали переменной α (сохранив при этом значения других предметных переменных), то формула $\forall\alpha\mathbf{A}$ примет значение «истина» в модели $\pi = \langle\mathbf{U}, \mathbf{I}\rangle$ при приписывании φ. Если же в **U** найдется индивид, при приписывании которого переменной α формула **A** окажется ложной, то $\forall\alpha\mathbf{A}$ примет значение «ложь».

Если приписав α какой-то элемент **U** (и сохранив при этом значения других переменных) мы обнаружим, что формула **A** принимает значение «истина», то и формулу $\exists\alpha\mathbf{A}$ следует считать истинной в модели $\pi = \langle\mathbf{U}, \mathbf{I}\rangle$ при исходном φ. Если же **A** оказывается ложной, какой бы объект ни был приписан α, то $\exists\alpha\mathbf{A}$ примет значение «ложь».

Дадим более строгую формулировку условий истинности и ложности произвольной формулы вида $\forall\alpha\mathbf{A}$ и произвольной формулы вида $\exists\alpha\mathbf{A}$. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ – список всех отличных от α предметных переменных, и пусть φ приписывает α индивид u из **U**, а переменным $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$, соответственно, индивиды $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ из **U**. Посредством ψ будем обозначать функцию, сопоставляющую переменным $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ те же самые, что и φ – элементы универсума $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, а переменной α – объект v из **U**, который может не совпасть, а может и совпасть с *и* (значением α при φ). Ясно, что приписывание ψ отличается от приписывания φ не более, чем значением, которое эта функция сопоставляет переменной α. Итак:

(F6) $|\forall\alpha\mathbf{A}|_\varphi = и$ $\Leftrightarrow$ **для любой функции ψ, отличающейся от φ не более, чем приписыванием значений для переменной α, верно, что $|\mathbf{A}|_\psi = и$.**

$|\forall\alpha\mathbf{A}|_\varphi = л$ $\Leftrightarrow$ **существует функция ψ, отличающаяся от функции φ не более, чем приписыванием значений для переменной α, такая что $|\mathbf{A}|_\psi = л$.**

Иными словами, формула $\forall\alpha\mathbf{A}$ принимает значение «истина» в модели π при приписывании φ, когда ее подкванторная часть **A** оказывается истинной в данной модели при приписывании переменной α любого объекта *v* из универсума **U** (а всем другим переменным – тех же самых значений). Если же в универсуме найдется такой объект *v*, что при указанном приписывании формула **A** ложна, то и $\forall\alpha\mathbf{A}$ в модели π при исходном приписывании φ принимает значение «ложь».

(F7) $|\exists\alpha\mathbf{A}|_\varphi = и$ $\Leftrightarrow$ **существует функция ψ, отличающаяся от функции φ не более, чем приписыванием значений для переменной α, такая что $|\mathbf{A}|_\psi = и$.**

$|\exists\alpha\mathbf{A}|_\varphi = л$ $\Leftrightarrow$ **для любой функции ψ, отличающейся от функции φ не более, чем приписыванием значений для переменной α, верно, что $|\mathbf{A}|_\psi = л$.**

Таким образом, формула $\exists\alpha\mathbf{A}$ принимает значение «истина» в модели π при приписывании φ, когда существует по крайней мере один объект *v* из универсума **U** такой, что формула **A** оказывается истинной при приписывании переменной α данного объекта (а всем другим переменным – тех же самых значений). Если же **A** окажется ложной при приписывании переменной α любого элемента универсума, формула $\exists\alpha\mathbf{A}$ примет в модели π при φ значение «ложь».

Анализ **(F6)** и **(F7)** свидетельствует, что для установления значений формул видов $\forall\alpha\mathbf{A}$ и $\exists\alpha\mathbf{A}$ в модели π при приписывании φ несущественно, какой именно объект это φ сопоставляет в качестве значения подкванторной переменной α. Вообще, при решении вопроса о том, какое значение принимает та или иная формула логики предикатов, важно указать только те индивиды, которые φ приписывает свободным переменным, входящим в данную формулу.

В качестве примера установим в заданной ранее конкретной модели π = <U, I> и при конкретном приписывании φ значения формул (м) $\exists x\mathbf{P}(x)$, (н) $\exists x\mathbf{Q}(y, x)$, (о) $\forall x\mathbf{P}(\mathbf{f}(x))$, (п) $\forall x\mathbf{Q}(\mathbf{g}(x, \mathbf{a}), y)$.

(м) Формула $\exists x\mathbf{P}(x)$ не содержит свободных переменных. Чтобы определить ее значение в π при φ, необходимо, согласно (**F7**), выяснить, существует ли в универсуме **U** (т. е. в множестве целых положительных чисел) объект v, такой что $|\mathbf{P}(x)|_\psi = \boldsymbol{u}$, где ψ приписывает переменной x значение v, а остальным переменным – те же значения, что и φ. Последнее, согласно (**F1**), имеет место тогда, когда $\psi(x)$, т. е. v, является элементом **I**(**P**) – в нашем случае элементом множества четных чисел. Итак, мы должны установить, существует ли число v, которое является четным. Поскольку такое число действительно существует, $|\exists x\mathbf{P}(x)|_\varphi = \boldsymbol{u}$.

(н) Формула $\exists x\mathbf{Q}(y, x)$ содержит свободную переменную y, которой φ приписало число 1. Выясним, существует ли целое положительное число v, такое что $|\mathbf{Q}(y, x)|_\psi = \boldsymbol{u}$, где $\psi(x) = v$, а $\psi(y) = 1$. С учетом того, что **I**(**Q**) есть множество всех таких пар чисел, первое из которых больше второго, а также, в соответствии с (**F1**), нам следует установить, имеется ли целое положительное число v, такое что $1 > v$. Поскольку такого числа нет, то, согласно (**F7**), можно сделать вывод: $|\exists x\mathbf{Q}(y, x)|_\varphi = \text{л}$.

(о) Чтобы установить значение в π при φ замкнутой формулы $\forall x\mathbf{P}(\mathbf{f}(x))$, необходимо, в соответствии с (**F6**), выяснить, для всякого ли приписывания ψ, отличающегося от φ разве что значением переменной x, верно, что $|\mathbf{P}(\mathbf{f}(x))|_\psi = \boldsymbol{u}$. Последнее, согласно (**F1**), имеет место, если значение терма $\mathbf{f}(x)$ при ψ является элементом **I**(**P**), т. е. четным числом. Поскольку **I** сопоставляет **f** операцию возведения в квадрат, $|\mathbf{f}(x)|_\psi = \psi(x)^2$. Итак, мы должны установить, для всякого ли целого положительного числа v верно, что v^2 является четным. Но данное утверждение неверно для некоторых чисел, например числа 1. Итак, если ψ сопоставляет переменной x число 1, то $|\mathbf{P}(\mathbf{f}(x))|_\psi = \text{л}$. Отсюда, в силу (**F6**), имеем: $|\forall x\mathbf{P}(\mathbf{f}(x))|_\varphi = \text{л}$.

(п) Формула $\forall x\mathbf{Q}(\mathbf{g}(x, \mathbf{a}), y)$ содержит свободную переменную y, которой φ сопоставляет 1. Ответим на вопрос, для всякого ли приписывания ψ, отличающегося от φ не более, чем значением переменной x, верно, что $|\mathbf{Q}(\mathbf{g}(x, \mathbf{a}), y)|_\psi = \boldsymbol{u}$. Если мы учтем, какие значения в модели π принимают константы **Q**, **g** и **a**, и тот факт, что $\psi(y) = \varphi(y) = 1$, то данный вопрос будет звучать так: для всякого ли целого положительного числа v верно, что $v + 2 > 1$? Поскольку ответ на этот вопрос утвердительный, то, в соответствии с (**F6**), $|\forall x\mathbf{Q}(\mathbf{g}(x, \mathbf{a}), y)|_\varphi = \boldsymbol{u}$.

После того как сформулированы условия истинности и ложности формул, и тем самым заданы точные значения логических символов языка, переходим к третьему этапу построения логики предикатов – введению понятия закона данной теории.

Напомним, что законом логической теории является формула, которая является истинной при любых допустимых в этой теории интерпретациях нелогических символов. В логике предикатов интерпретация нелогических символов осуществляется посредством выбора некоторой модели (возможной реализации языка) $\pi = \langle \mathbf{U}, \mathbf{I} \rangle$ и приписывания значений предметным переменным φ. Поэтому в данной теории общее понятие логического закона конкретизируется следующим образом:

Формула А является *законом классической логики предикатов* (*общезначимой формулой*), если и только если А принимает значение «истина» в каждой модели (каждой возможной реализации) π и при каждом приписывании значений предметным переменным φ.

Из данного определения непосредственно вытекает следующая трактовка *опровержимой* (*необщезначимой*) формулы:

Формула А *опровержима* в логике предикатов тогда и только тогда, когда существует модель π и существует функция приписывания предметным переменным φ, при которых А принимает значение «ложь».

Утверждение «Формула **А** общезначима» будем записывать сокращенно так: «$\models$ **А**».

Примером общезначимой формулы является $\forall x\mathbf{P}(x) \supset \exists x\mathbf{P}(x)$. Покажем, что эта формула действительно является законом логики предикатов.

Будем рассуждать от противного. Пусть $\forall x\mathbf{P}(x) \supset \exists x\mathbf{P}(x)$ необщезначимая (опровержимая) формула. Тогда существует возможная реализация π и приписывание φ, при которых $|\forall x\mathbf{P}(x) \supset \exists x\mathbf{P}(x)|_\varphi = \text{л}$. Тогда, согласно (**F5**), $|\forall x\mathbf{P}(x)|_\varphi = \boldsymbol{и}$ и $|\exists x\mathbf{P}(x)|_\varphi = \text{л}$. Истинность $\forall x\mathbf{P}(x)$, согласно (**F6**), означает, что $\mathbf{P}(x)$ истинно при любом приписывании, отличающемся от φ не более, чем значением x. Ложность $\exists x\mathbf{P}(x)$, согласно (**F7**), означает, что $\mathbf{P}(x)$ ложно при любом подобном приписывании. Рассмотрим какое угодно конкретное приписывание ψ указанного типа. Получается, что, с одной стороны, $|\mathbf{P}(x)|_\psi = \boldsymbol{и}$, а с другой, $|\mathbf{P}(x)|_\psi = \text{л}$. Таким образом, мы пришли к противоречию. Следовательно, допущение о необщезначимости формулы $\forall x\mathbf{P}(x) \supset \exists x\mathbf{P}(x)$ неверно и она действительно является законом логики предикатов.

Чтобы продемонстрировать опровержимость некоторой формулы, достаточно найти такие модель $\boldsymbol{\pi} = \langle \mathbf{U}, \mathbf{I} \rangle$ и приписывание φ, при которых эта формула примет значение *л*. Покажем, например, что формула $\exists x\mathbf{P}(x) \supset \forall x\mathbf{P}(x)$ опровержима.

Выберем в качестве области интерпретации **U** множество людей. Пусть интерпретационная функция **I** сопоставляет предикаторной константе **P** множество мужчин. Исходное приписывание φ выбирается произвольным образом. Если переменной x приписать в качестве значения Сократа, то в нашей модели $\pi = \langle \mathbf{U}, \mathbf{I} \rangle$ формула $\mathbf{P}(x)$ окажется истинной, ведь Сократ является мужчиной, т. е. элементом $\mathbf{I}(\mathbf{P})$. Итак, существует такое приписывание ψ, что $|\mathbf{P}(x)|_\psi = \boldsymbol{и}$, откуда следует, что $|\exists x\mathbf{P}(x)|_\varphi = \boldsymbol{и}$ при произвольном φ. Если же переменной x приписать в качестве значения жену Сократа – Ксантиппу, т. е. выбрать приписывание ξ такое, что $\xi(x)$ = Ксантиппа (а всем другим переменным ξ сопоставляет те же значения, что и ψ), то $\mathbf{P}(x)$ окажется ложной формулой, поскольку Ксантиппа не является мужчиной: $|\mathbf{P}(x)|_\xi = \text{л}$. Последнее означает, что $|\forall x\mathbf{P}(x)|_\varphi = \text{л}$. Истинность $\exists x\mathbf{P}(x)$ и ложность $\forall x\mathbf{P}(x)$

в π при φ свидетельствует о том, что $|\exists x\mathbf{P}(x) \supset \forall x\mathbf{P}(x)|_\varphi = л$. Данная формула является опровержимой, поскольку мы указали модель и приписывание, при которых она ложна.

Наряду с понятиями общезначимой и опровержимой формул очень важными являются понятия *выполнимой* и *невыполнимой* в классической логике предикатов формул.

Формула A языка логики предикатов является *выполнимой*, если и только если существует модель π и приписывание значений предметным переменным φ, при которых A принимает значение «истина».

Покажем, например, что формула $\exists x\mathbf{P}(x) \supset \forall x\mathbf{P}(x)$, необщезначимость которой была только что установлена, является выполнимой. Для этого достаточно указать конкретные модель $\pi = \langle \mathbf{U}, \mathbf{I} \rangle$ и приписывание φ, при которых она истинна.

Пусть **U** снова является множеством людей, но пусть теперь **I** сопоставляет **P** пустое множество (например, множество людей, побывавших на Солнце), функция φ может быть произвольной, так как рассматриваемая формула не содержит свободных индивидных переменных. Ясно, что ни один человек не является элементом **I**(**P**), ведь у пустого множества нет элементов. Поэтому формула $\mathbf{P}(x)$ ложна при приписывании x любого объекта из **U**, т. е. $|\mathbf{P}(x)|_\psi = л$ для любого ψ. А из этого, согласно (**F7**), следует, что $|\exists x\mathbf{P}(x)|_\varphi = л$. Но если антецедент импликативной формулы ложен, то, согласно (**F5**), сама эта формула истинна, т. е. $|\exists x\mathbf{P}(x) \supset \forall x\mathbf{P}(x)|_\varphi = и$. Следовательно, рассматриваемая формула выполнима.

Из последнего определения вытекает, что:

Формула является *невыполнимой* тогда и только тогда, когда она принимает значение «ложь» в каждой модели π и при каждом приписывании значений предметным переменным φ.

В качестве примера покажем, что формула $\neg\exists x\mathbf{P}(x)\ \&\ \mathbf{P}(\mathrm{a})$ является невыполнимой.

Будем рассуждать от противного. Предположим, что эта формула выполнима. Тогда существует возможная реализация $\pi = \langle \mathbf{U}, \mathbf{I} \rangle$ и приписывание φ, при которых она истинна. Поскольку наша формула является конъюнктивной, ее истинность, согласно (**F3**), означает, что $|\neg\exists x\mathbf{P}(x)|_\varphi = \textit{u}$ и $|\mathbf{P}(\mathbf{a})|_\varphi = \textit{u}$. Истинность $\mathbf{P}(\mathbf{a})$, согласно (**F1**), свидетельствует о том, что $\mathbf{I}(\mathbf{a}) \in \mathbf{I}(\mathbf{P})$. А истинность $\neg\exists x\mathbf{P}(x)$ равносильна, согласно (**F2**), ложности $\exists x\mathbf{P}(x)$. Последнее, согласно (**F7**), означает, что $|\mathbf{P}(x)|_\psi = \textit{л}$ при любом приписывании ψ, которое отличается от φ разве что значением x. В частности $|\mathbf{P}(x)|_\psi = \textit{л}$ при таком ψ, которое приписывает x тот же объект, что функция $\mathbf{I}$ сопоставляет константе $\mathbf{a}$, т. е. $\psi(x) = \mathbf{I}(\mathbf{a})$. Отсюда, в соответствии с (**F1**), следует, что $\psi(x)$, а значит $\mathbf{I}(\mathbf{a})$ не содержится в $\mathbf{I}(\mathbf{P})$, что противоречит ранее полученному утверждению $\mathbf{I}(\mathbf{a}) \in \mathbf{I}(\mathbf{P})$. Поэтому допущение о выполнимости формулы $\neg\exists x\mathbf{P}(x)\ \&\ \mathbf{P}(\mathbf{a})$ неверно, и она невыполнима.

Теперь мы имеем возможность в рамках классической логики предикатов решать вопросы, являются ли высказывания естественного языка логически истинными, логически ложными и логически недетерминированными. Для этого необходимо, во-первых, зафиксировать логическую форму высказывания в языке логики предикатов и, во-вторых, определить, общезначима ли полученная формула и является ли она выполнимой.

Если указанная формула общезначима, то исходное высказывание естественного языка *логически истинно* относительно логики предикатов.

Если полученная формула невыполнима, то соответствующее высказывание *логически ложно.*

Если же данная формула выполнима и опровержима, то относительно логики предикатов исходное высказывание является *логически недетерминированным.*

Установим, например, какой статус в рамках логики предикатов имеют следующие высказывания:

(1) Если всякий храбр, то кто-то храбр.
(2) Если кто-то храбр, то всякий храбр.
(3) Не существует храбрецов, но Ромео храбр.

Сопоставим одноместному предикатору «храбрый» предикаторную константу **P**, а имени «Ромео» – предметную константу **a**.

В этом случае логической формой высказывания (1) будет формула $\forall x\mathrm{P}(x) \supset \exists x\mathrm{P}(x)$. Ранее было установлено, что она является общезначимой. Поэтому высказывание (1) логически истинно.

Логическая форма высказывания (2) может быть выражена формулой $\exists x\mathrm{P}(x) \supset \forall x\mathrm{P}(x)$, которая, как было показано выше, опровержима и выполнима. Поэтому высказывание (2) логически недетерминировано.

Наконец, высказывание (3) является логически ложным, поскольку его логическая форма – $\neg\exists x\mathrm{P}(x)\ \&\ \mathrm{P}(\mathrm{a})$ – относится к числу невыполнимых формул.

Ч е т в е р т ы м, з а в е р ш а ю щ и м э т а п о м в построении классической логики предикатов является определение различных типов логических отношений между формулами ее языка.

Зададим в данной теории *фундаментальные* логические отношения – отношения *совместимости по истинности*, *совместимости по ложности* и *логического следования*. Пусть Г – произвольное непустое множество формул языка логики предикатов.

Формулы из Г *совместимы по истинности*, если и только если существуют модель и приписывание значений предметным переменным φ, при которых каждая формула из Г принимает значение «истина». В противном случае они *несовместимы по истинности*.

Формулы из Г *совместимы по ложности*, если и только если существуют модель и приписывание значений предметным переменным φ, при которых каждая формула из Г принимает значение «ложь». В противном случае формулы *несовместимы по ложности*.

Из множества формул Г *логически следует* формула В (Г ⊨ В), если и только если не существует модели и приписывания значений предметным переменным φ, при которых каждая формула из Г принимает значение «истина», а формула В – значение «ложь».

Покажем, например, что формулы $\exists x\mathrm{Q}(x, y)$ и $\exists x\neg\mathrm{Q}(x, y)$ совместимы по истинности. Для этого достаточно найти конкретную модель $\pi = \langle U, I\rangle$ и конкретное приписывание φ, при которых каждая из этих формул истинна.

Выберем в качестве **U** множество городов. Пусть **I** сопоставляет двухместной предикаторной константе **Q** множество таких пар городов, первый из которых севернее второго. Пусть φ приписывает переменной y, свободной в указанных формулах, город Москву, а остальным переменным – произвольные города. Рассмотрим теперь приписывания ψ и ξ, отличающиеся от φ не более, чем значением x. Пусть функция ψ переменной y так же, как и φ, сопоставляет Москву, а x – Мурманск. Поскольку Мурманск севернее Москвы, пара <Мурманск, Москва> содержится в $\mathbf{I}(\mathbf{Q})$ и, значит, $|\mathbf{Q}(x, y)|_\psi = \boldsymbol{u}$. Отсюда, согласно (**F7**), следует, что $|\exists x\mathbf{Q}(x, y)|_\varphi = \boldsymbol{u}$. Пусть функция ξ переменной y снова сопоставляет Москву, а x – Астрахань. Поскольку Астрахань не севернее Москвы, пара <Астрахань, Москва> не содержится в $\mathbf{I}(\mathbf{Q})$, и $|\mathbf{Q}(x, y)|_\xi = \boldsymbol{л}$. Тогда, согласно (**F2**), $|\neg\mathbf{Q}(x, y)|_\xi = \boldsymbol{u}$, откуда по (**F7**) получаем: $|\exists x\neg\mathbf{Q}(x, y)|_\varphi = \boldsymbol{u}$. Таким образом, формулы $\exists x\mathbf{Q}(x, y)$ и $\exists x\neg\mathbf{Q}(x, y)$ в рассмотренной нами модели $\pi = \langle U, I\rangle$ при приписывании φ одновременно принимают значение «истина».

С использованием тех же самых **U**, **I** и φ можно показать совместимость по ложности формул $\forall x\neg\mathbf{Q}(x, y)$ и $\forall x\mathbf{Q}(x, y)$.

Только что было установлено, что $|\mathbf{Q}(x, y)|_\psi = \boldsymbol{u}$. Отсюда по (**F2**) следует: $|\neg\mathbf{Q}(x, y)|_\psi = \boldsymbol{л}$. Тогда, согласно (**F6**), $|\forall x\neg\mathbf{Q}(x, y)|_\varphi = \boldsymbol{л}$. Кроме того, имело место $|\mathbf{Q}(x, y)|_\xi = \boldsymbol{л}$. Отсюда вытекает: $|\forall x\mathbf{Q}(x, y)|_\varphi = \boldsymbol{л}$. Таким образом, в данной модели и при данном приписывании формулы $\forall x\neg\mathbf{Q}(x, y)$ и $\forall x\mathbf{Q}(x, y)$ одновременно ложны. Следовательно, они совместимы по ложности.

Формулы $\forall x\neg\mathbf{Q}(x, y)$ и $\forall x\mathbf{Q}(x, y)$ не являются вместе с тем совместимыми по истинности.

Чтобы доказать это, будем рассуждать от противного. Допустим, что они совместимы по истинности. Это означает, что существует модель $\pi = \langle U, I\rangle$ и приписывание φ, при которых обе формулы принимают значение «истина». С учетом того, что функция φ отличается от самой себя не более, чем значением x, и используя (**F6**), получаем: $|\neg\mathbf{Q}(x, y)|_\varphi = \boldsymbol{u}$ и $|\mathbf{Q}(x, y)|_\varphi = \boldsymbol{u}$. Но из того, что

$|\neg Q(x, y)|_\varphi = \boldsymbol{u}$, в силу (**F2**), следует, что $|Q(x, y)|_\varphi = \textit{л}$. В рассуждении получено противоречие. Значит, исходные формулы по истинности несовместимы.

С помощью похожего рассуждения несложно доказать несовместимость по ложности формул $\exists x Q(x, y)$ и $\exists x \neg Q(x, y)$.

Подведем итог рассмотрению последних примеров. Исходя из них можно утверждать, что формулы $\forall x \neg Q(x, y)$ и $\forall x Q(x, y)$ находятся в отношении противоположности (контрарности), поскольку они совместимы по ложности, но несовместимы по истинности, а формулы $\exists x Q(x, y)$ и $\exists x \neg Q(x, y)$ – в отношении подпротивоположности (субконтрарности), так как они, наоборот, совместимы по истинности, но несовместимы по ложности.

Перейдем теперь к рассмотрению примеров установления отношения логического следования в логике предикатов. Покажем, что из формул $P(a)$ и $Q(a)$ логически следует $\exists x(P(x) \;\&\; Q(x))$.

Допустим, что это не так. Тогда существуют модель $\pi = \langle U, I\rangle$ и приписывание φ, при которых формулы $P(a)$ и $Q(a)$ истинны, а формула $\exists x(P(x) \;\&\; Q(x))$ ложна. Истинность $P(a)$ и $Q(a)$, согласно (**F1**), означает, что $I(a) \in I(P)$ и $I(a) \in I(Q)$. Поэтому, если переменной x приписать объект $I(a)$ посредством функции ψ (которая всем другим переменным припишет те же объекты, что и φ), то $|P(x)|_\psi = \boldsymbol{u}$ и $|Q(x)|_\psi = \boldsymbol{u}$. Отсюда, в силу (**F3**), вытекает, что $|P(x) \;\&\; Q(x)|_\psi = \boldsymbol{u}$. Используя (**F7**), получаем, что $|\exists x(P(x) \;\&\; Q(x))|_\varphi = \boldsymbol{u}$. Но $|\exists x(P(x) \;\&\; Q(x))|_\varphi = \textit{л}$ согласно принятому допущению. Налицо противоречие, свидетельствующее о неверности этого допущения. А потому:

$$P(a), Q(a) \models \exists x(P(x) \;\&\; Q(x)).$$

Наличие отношения логического следования между указанными формулами свидетельствует о правильности всех умозаключений следующей формы:

$$\frac{P(a), Q(a)}{\exists x(P(x) \;\&\; Q(x)).}$$

Правильным, в частности, является такое умозаключение:

Отелло ревнив.
Отелло простодушен.
Некоторые ревнивые люди простодушны.

Постараемся далее ответить на вопрос, является ли правильным другое умозаключение:

Существуют ревнивые люди.
Существуют простодушные люди.
Некоторые ревнивые люди простодушны.

Для ответа на поставленный вопрос необходимо выявить логическую форму умозаключения и определить, следует ли логическая форма его заключения из логических форм посылок. Последнее умозаключение имеет следующую форму:

$$\frac{\exists x\mathbf{P}(x),\ \exists x\mathbf{Q}(x)}{\exists x(\mathbf{P}(x)\ \&\ \mathbf{Q}(x)).}$$

Покажем, что из формул $\exists x\mathbf{P}(x)$ и $\exists x\mathbf{Q}(x)$ логически не следует формула $\exists x(\mathbf{P}(x)\ \&\ \mathbf{Q}(x))$. Для этого достаточно найти какую-нибудь модель $\pi = <\mathbf{U}, \mathbf{I}>$ и приписывание φ, при которых формулы $\exists x\mathbf{P}(x)$ и $\exists x\mathbf{Q}(x)$ примут значение «истина», а формула $\exists x(\mathbf{P}(x)\ \&\ \mathbf{Q}(x))$ – значение «ложь».

Рассмотрим в качестве универсума $\mathbf{U}$ множество животных. Пусть интерпретационная функция $\mathbf{I}$ сопоставляет константе $\mathbf{P}$ множество волков, а константе $\mathbf{Q}$ множество зайцев. Поскольку все анализируемые формулы замкнуты, приписывание φ выбирается произвольно. Формула $\exists x\mathbf{P}(x)$ истинна в указанной модели $\pi = <\mathbf{U}, \mathbf{I}>$ при φ, так как переменной x можно приписать в качестве значения животное (элемент $\mathbf{U}$), которое является волком. Формула $\exists x\mathbf{Q}(x)$ также истинна, поскольку x можно приписать в качестве значения зайца (т. е. элемент $\mathbf{I}(\mathbf{Q})$). Однако, какое бы животное мы ни приписали x, оно не может оказаться одновременно и волком, и зайцем, т. е. $|\mathbf{P}(x)\ \&\ \mathbf{Q}(x)|_\psi = л$ при любом ψ. Последнее свидетельствует о ложности формулы $\exists x(\mathbf{P}(x)\ \&\ \mathbf{Q}(x))$ в модели $\pi = <\mathbf{U}, \mathbf{I}>$ при φ. Таким образом, формула $\exists x(\mathbf{P}(x)\ \&\ \mathbf{Q}(x))$ не следует логически из формул $\exists x\mathbf{P}(x)$ и $\exists x\mathbf{Q}(x)$, т. е. рассматриваемое умозаключение неправильно.

§3. Метод аналитических таблиц

В предыдущем параграфе введены понятия закона классической логики предикатов (общезначимой формулы) и логического следования. Таким образом, были даны ответы на важнейшие для каждой логической теории вопросы: что является законом этой теории и что представляет собой отношение логического следования в ней.

Однако, с практической точки зрения, не менее важно получить ответ на другие вопросы: каким образом, с помощью какой процедуры можно показать, что некоторая формула **A** действительно является законом данной логической теории и что из формул $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ в этой теории действительно следует формула **B**.

В некоторых логических теориях сами определения понятий логического закона и логического следования содержат указания на проверочную процедуру, позволяющую устанавливать, является ли произвольная формула языка данной теории ее законом и следует ли из каких-либо формул $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ в этой теории формула **B**. Например, в классической логике высказываний (в том виде, как эта теория построена в главе II) чтобы выяснить, является ли формула **A** ее законом, необходимо, в соответствии с определением тождественно-истинной формулы, построить таблицу истинности для **A** и установить, принимает ли эта формула значение «истина» во всех строках данной таблицы. Для ответа на вопрос, следует ли формула **B** из формул $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ в классической логике высказываний, необходимо, согласно определению логического следования в этой теории, построить совместную таблицу истинности для формул $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ и **B** и установить, имеется ли в данной таблице строка, в которой $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ принимают значение «истина», а **B** – значение «ложь».

Процесс построения таблиц истинности является *алгоритмическим*: в конечное число шагов можно проверить, является ли произвольная формула логики высказываний ее законом (а также имеет ли место отношение логического следования между $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ и **B**). Логические теории, законы которых могут быть установлены с помощью эффективной процедуры, называются *разрешимыми*.

Логическая теория называется *разрешимой*, если существует эффективная процедура (алгоритм), позво-

ляющая для любой формулы языка данной теории в конечное число шагов решать вопрос о том, является ли эта формула законом теории или нет.

Очевидно, что классическая логика высказываний разрешима, причем эффективный характер имеет та процедура, которая указана в определениях логического закона и логического следования при табличном построении этой теории.

Иначе обстоит дело с классической логикой предикатов. Определения закона этой теорий и логического следования в ней не являются эффективными, т. е. не содержат алгоритма решения вопросов об общезначимости произвольной формулы **A** и о наличии отношения следования между произвольными формулами $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2,..., \mathbf{A}_n$ и **B**.

Действительно, для того чтобы установить общезначимость формулы **A**, в соответствии с определением общезначимой формулы, необходимо рассмотреть все модели и убедиться, что в каждом случае эта формула принимает значение «истина». Для того чтобы показать, что $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2,..., \mathbf{A}_n \models \mathbf{B}$, согласно определению логического следования, нужно рассмотреть все модели и возможные распределения значений предметных переменных и удостовериться, что среди них нет таких, где $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2,..., \mathbf{A}_n$ принимали бы значение «истина», а **B** – значение «ложь». Однако подобный перебор всех моделей π и приписываний φ невозможен в силу того, что их число бесконечно (в отличие от числа строк любой таблицы истинности).

Более того, никакого алгоритма решения вопросов об общезначимости формул языка логики предикатов и наличия между ними отношения логического следования не существует в принципе, т. е. классическая логика предикатов н е р а з р е ш и м а. Таким образом, решения указанных вопросов представляют собой творческую задачу.

Вместе с тем в современной логике разработан ряд методов, позволяющих упростить, сделать стандартной и, насколько это возможно, эффективной процедуру обоснования общезначимости формул и наличия следования между формулами языка логики предикатов. Один из них, получивший название *метода аналитических таблиц*, будет рассмотрен в данном параграфе.

Идея указанного метода состоит в том, что тезис об общезначимости формулы **A** и тезис о следовании формулы **B** из $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2,..., \mathbf{A}_n$ обосновываются посредством рассуждения от противного. Так, для обоснования тезиса «$\models$ **A**» («формула **A** истинна в каждой модели π = <**U**, **I**> при каждом приписывании φ») показывают, что допущение ложности формулы **A** с необходимостью приводит к противоречию. Для обоснования тезиса «$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2,..., \mathbf{A}_n \models \mathbf{B}$» («не существует модели и приписывания, при которых $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2,..., \mathbf{A}_n$ истинны, а **B** ложна») демонстрируют, что допущение истинности $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2,..., \mathbf{A}_n$ и ложности **B** необходимо ведет к противоречию.

Рассуждение от противного, обосновывающее какой-либо из указанных тезисов, оформляется в виде некоторой последовательности шагов, которые образуют *аналитическую таблицу*. Причем каждому шагу рассуждения соответствует некоторая строка этой таблицы.

Любая строка аналитической таблицы содержит один или несколько списков формул (различные списки формул в строке таблицы будем разделять вертикальными линиями). Наличие какой-либо формулы **C** в некотором списке, с содержательной точки зрения, можно истолковать как утверждение об истинности **C**, а наличие $\neg$**C** – как утверждение о ложности формулы **C**.

При обосновании тезисов «$\models$ **A**» и «$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2,..., \mathbf{A}_n \models \mathbf{B}$» первая строка таблицы соответствует первому шагу рассуждения от противного и содержит один список формул, выражающий исходное допущение данного рассуждения – антитезис. Если тезисом является «$\models$ **A**», то этот список содержит единственную формулу – $\neg$**A** – допущение о ложности **A**. Если же тезисом является метавыражение «$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2,..., \mathbf{A}_n \models \mathbf{B}$», то список в первой строке таблицы состоит из формул $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2,..., \mathbf{A}_n, \neg\mathbf{B}$, т. е. выражает допущение об истинности $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2,..., \mathbf{A}_n$ и ложности **B**.

Переход от какой-либо строки аналитической таблицы (строки с номером *n*) к следующей строке (строке с номером *n* + 1) осуществляется с помощью точных формальных правил, которые называются *правилами редукции*. В основе правил редукции лежат принимаемые в классической логике предикатов трактовки логических терминов: пропозициональных связок $\neg$, &, $\vee$, $\supset$ и кванторов $\forall$, $\exists$. Данные правила, по существу, отражают условия истинности и ложности формул вида $\neg$**A**, (**A** & **B**), (**A** $\vee$ **B**), (**A** $\supset$ **B**), $\forall\alpha$**A**, $\exists\alpha$**A**, указывая на те следствия, которые могут быть получены из факта истинности или ложности формул приведенных типов. Каждое правило редукции позволяет на *n* + 1-ом шаге заменять один из списков формул, содержащихся в строке с номером *n*, на один или два новых формульных списка.

Цель рассуждения от противного – показать, что исходное допущение (антитезис) с необходимостью приводит к противоречию. Поэтому задача, решаемая при построении аналитической таблицы, состоит в получении такой строки, каждый формульный список которой содержит некоторую формулу **C** вместе с ее отрицанием $\neg$**C**, т. е. утверждает как истинность, так и ложность **C**. При получении данного результата тезис об общезначимости формулы **A** или же о следовании **B** из $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ считается обоснованным, и процесс построения таблицы завершается.

Применение метода аналитических таблиц будет ограничено замкнутыми формулами – формулами, не содержащими свободных предметных переменных. Иначе говоря, аналитические таблицы будут строиться для обоснования тезисов «$\models \mathbf{A}$» и «$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \models \mathbf{B}$» лишь для тех случаев, когда **A**, $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ и **B** являются замкнутыми формулами. Это условие никоим образом не ограничивает возможность обоснования логической истинности высказываний естественного языка и демонстрации правильности умозаключений. Действительно, посылками и заключениями в умозаключениях являются высказывания, а логические формы высказываний в языке логики предикатов фиксируются посредством именно замкнутых формул.

Осуществим теперь строгую формулировку аналитико-табличной процедуры.

Правила редукции.

Правило [&]. Предположим, что в строке с номером *n* в каком-либо из списков формул содержится формула **A & B**, т. е. данный список имеет вид: **Γ, A & B, Δ**, где **Γ** – часть списка (возможно пустая), предшествующая **A & B**, а **Δ** – часть списка (возможно пустая), следующая за **A & B**.

Наличие **A & B** в данном списке содержательно выражает утверждение об истинности данной формулы. Как известно, конъюнктивная формула **A & B** истинна тогда и только тогда, когда истинными являются ее подформулы **A** и **B**. Поэтому формулу **A & B** из нашего списка можно заменить двумя формулами – **A, B**. Правило [&] позволяет в строке с номером $n + 1$ поместить вместо списка **Γ, A & B, Δ** новый список **Γ, A, B, Δ**, сохранив при этом все другие списки формул из строки с номером *n*. Сокращенная формулировка данного правила выглядит следующим образом:

$$[\&] \ \frac{\mathbf{\Gamma, A \ \& \ B, \Delta}}{\mathbf{\Gamma, A, B, \Delta}.}$$

Правило [¬&]. Пусть в некотором списке формул n-ной строки аналитической таблицы содержится формула ¬(**A** & **B**), т. е. этот список имеет вид: **Г**, ¬(**A** & **B**), **Δ**. Формула ¬(**A** & **B**) выражает утверждение о ложности **A** & **B**. Напомним, что конъюнктивная формула ложна, если и только если **A** принимает значение «ложь» или **B** принимает значение «ложь». Иначе говоря, в случае ложности **A** & **B** мы имеем два варианта:

(1) случай, когда ложна **A**,
(2) случай, когда ложна **B**.

Поэтому в строке с номером $n + 1$ вместо списка **Г**, ¬(**A** & **B**), **Δ** помещаются два новых списка формул – **Г**, ¬**A**, **Δ** (он соответствует первому случаю) и **Г**, ¬**B**, **Δ** (он соответствует второму случаю):

$$[\neg\&] \ \frac{\mathbf{\Gamma, \neg(A \ \& \ B), \Delta}}{\mathbf{\Gamma, \neg A, \Delta} \ \big| \ \mathbf{\Gamma, \neg B, \Delta}.}$$

Все другие формульные списки из n-ной строки переносятся в строку с номером $n + 1$. То же самое происходит и при применении остальных правил редукции, поэтому данное условие в дальнейшем не оговаривается.

Правило [∨]. Наличие формулы **A** ∨ **B** в некотором списке формул n-ной строки содержательно означает утверждение об истинности **A** ∨ **B**. Данная формула истинна, если и только если **A** принимает значение «истина» или **B** принимает значение «истина». Поэтому после применения правила [∨] в строке с номером $n + 1$ должны быть рассмотрены обе эти возможности:

$$[\vee] \ \frac{\mathbf{\Gamma, A \vee B, \Delta}}{\mathbf{\Gamma, A, \Delta} \ \big| \ \mathbf{\Gamma, B, \Delta}.}$$

Правило [¬∨]. Наличие формулы ¬(**A** ∨ **B**) в некотором списке означает утверждение о ложности **A** ∨ **B**. Данная формула ложна, если и только если как **A**, так и **B** принимают значение «ложь». Поэтому ¬(**A** ∨ **B**) может быть заменена формулами ¬**A** и ¬**B**:

$$[\neg\vee]\ \frac{\mathbf{\Gamma, \neg(A \vee B), \Delta}}{\mathbf{\Gamma, \neg A, \neg B, \Delta}.}$$

Правило [⊃]. Предположим, что в строке с номером *n* имеется список, содержащий импликативную формулу: **Г, A ⊃ B, Δ**. Формула **A ⊃ B** истинна, если и только если имеет место по крайней мере один из двух случаев:

(1) случай, когда ложна **A**,
(2) случай, когда истинна **B**.

Поэтому вместо списка **Г, A ⊃ B, Δ** в строку с номером $n + 1$ помещаются два списка – **Г, ¬A, Δ** (который соответствует случаю ложности антецедента) и **Г, B, Δ** (который соответствует случаю истинности консеквента):

$$[\supset]\ \frac{\mathbf{\Gamma, A \supset B, \Delta}}{\mathbf{\Gamma, \neg A, \Delta} \mid \mathbf{\Gamma, B, \Delta}.}$$

Правило [¬⊃]. Пусть некоторый список формул включает формулу **¬(A ⊃ B)**, т. е. содержит утверждение о ложности **A ⊃ B**. Эта формула принимает значение «ложь», если и только если **A** истинна, а **B** – ложна. Поэтому формулу **¬(A ⊃ B)** можно заменить формулами **A** и **¬B**:

$$[\neg\supset]\ \frac{\mathbf{\Gamma, \neg(A \supset B), \Delta}}{\mathbf{\Gamma, A, \neg B, \Delta}.}$$

Правило [¬¬]. Наличие формулы **¬¬A** в некотором списке означает утверждение о ложности **¬A**. Поскольку ложность **¬A** равносильна истинности **A**, формула **¬¬A** может быть заменена на **A**:

$$[\neg\neg]\ \frac{\mathbf{\Gamma, \neg\neg A, \Delta}}{\mathbf{\Gamma, A, \Delta}.}$$

Правило [∀]. Предположим, что в строке с номером *n* имеется список вида **Г, ∀αA, Δ**. Наличие в нем формулы **∀αA** означает утверждение об истинности **∀αA**. В соответствии с принятой в логике предикатов трактовкой квантора общности, формула **∀αA** истинна, если и только если любой индивид предметной области удовлетворяет условию **A**. Поэтому в случае истинности $\forall\alpha\mathbf{A}$ истинной оказывается также любая формула вида $\mathbf{A(t)}$, которая является результатом замены всех свободных вхождений α в **A** на произвольный замкнутый терм **t**. Правило [∀] позволяет на $n + 1$-ом шаге заменить список Γ, $\forall\alpha\mathbf{A}$, Δ списком Γ, $\forall\alpha\mathbf{A}$, $\mathbf{A(t)}$, Δ с каким-то конкретным термом **t**. Формула $\forall\alpha\mathbf{A}$ сохраняется в указанном списке для того, чтобы в процессе дальнейшего построения аналитической таблицы можно было бы повторным применением данного правила получать утверждения об истинности $\mathbf{A(t_1)}$, $\mathbf{A(t_2)}$,... для термов, отличных от терма **t**.

Итак, правило [∀] формулируется следующим образом:

$$[\forall]\ \frac{\Gamma, \forall\alpha\mathbf{A}, \Delta}{\Gamma, \forall\alpha\mathbf{A}, \mathbf{A(t)}, \Delta,}$$

где $\mathbf{A(t)}$ – результат замены всех свободных вхождений переменной α в формуле **A** на произвольный замкнутый терм **t**.

Правило [¬∀]. Пусть в строке с номером n имеется список формул вида Γ, $\neg\forall\alpha\mathbf{A}$, Δ. Этот список включает формулу $\neg\forall\alpha\mathbf{A}$, т. е. содержит утверждение о ложности $\forall\alpha\mathbf{A}$. Ложность формулы $\forall\alpha\mathbf{A}$ означает существование объекта, не удовлетворяющего условию **A**. Введем в качестве имени этого объекта предметную константу **k**. Ясно, что поскольку **k** не удовлетворяет условию **A**, формула $\mathbf{A(k)}$ – результат замены всех свободных вхождений α в **A** на **k** – оказывается ложной. Поэтому список Γ, $\neg\forall\alpha\mathbf{A}$, Δ может быть заменен на $n + 1$-ом шаге списком Γ, $\neg\mathbf{A(k)}$, Δ.

При этом требуют, чтобы константа **k** отсутствовала в исходном списке Γ, $\neg\forall\alpha\mathbf{A}$, Δ. Смысл этого ограничения состоит в следующем. Если **k** входит в формулы указанного списка, то не исключается возможность, что эти формулы содержат информацию об истинности $\mathbf{A(k)}$. Тогда делать вывод, что именно объект **k** не удовлетворяет условию **A**, было бы некорректно.

Итак, правило [¬∀] формулируется следующим образом:

$$[\neg\forall]\ \frac{\Gamma, \neg\forall\alpha\mathbf{A}, \Delta}{\Gamma, \neg\mathbf{A(k)}, \Delta,}$$

где $\mathbf{A(k)}$ – результат замены всех свободных вхождений переменной

α в формуле **A** на предметную константу **k**, которая не содержится в верхнем списке формул.

Правило [$\exists$]. Пусть какой-то список формул включает формулу $\exists\alpha$**A**, т. е. содержит утверждение об истинности $\exists\alpha$**A**. Согласно принятой в классической логике предикатов трактовке квантора $\exists$, истинность $\exists\alpha$**A** означает существование объекта, удовлетворяющего условию **A**. Во избежание коллизий, описанных при формулировке предыдущего правила, в качестве имени этого объекта вводится новая, не встречающаяся в формулах исходного списка **Г**, $\exists\alpha$**A**, **Δ**, предметная константа **k**. Ясно, что **A(k)** истинно в силу того, что **k** удовлетворяет условию **A**. Правило [$\exists$] позволяет заменить в списке **Г**, $\exists\alpha$**A**, **Δ** формулу $\exists\alpha$**A** на **A(k)**:

$$[\exists]\ \frac{\mathbf{\Gamma}, \exists\alpha\mathbf{A}, \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A(k)}, \mathbf{\Delta},}$$

где **A(k)** – результат замены всех свободных вхождений переменной α в **A** на предметную константу **k**, которая не содержится в верхнем списке формул.

Правило [$\neg\exists$]. Предположим, что в строке с номером *n* имеется список формул **Г**, $\neg\exists\alpha$**A**, **Δ**. Наличие в нем формулы $\neg\exists\alpha$**A** говорит о ложности $\exists\alpha$**A**. Ложность формулы $\exists\alpha$**A** означает, что любой индивид предметной области не удовлетворяет условию **A**. Поэтому на $n + 1$-ом шаге мы можем пополнить рассматриваемый список формулой вида $\neg$**A(t)**, где **t** – произвольный замкнутый терм. При этом формула $\neg\exists\alpha$**A** должна быть сохранена, чтобы в процессе дальнейшего построения таблицы обеспечивалась возможность получать посредством применения этого же правила утверждения о ложности $\mathbf{A(t_1)}, \mathbf{A(t_2)}, \ldots$ для термов, отличных от **t**.

$$[\neg\exists]\ \frac{\mathbf{\Gamma}, \neg\exists\alpha\mathbf{A}, \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma}, \neg\exists\alpha\mathbf{A}, \neg\mathbf{A(t)}, \mathbf{\Delta},}$$

где **A(t)** – результат замены всех свободных вхождений α в **A** на произвольный замкнутый терм **t**.

Дадим теперь определение *аналитической таблицы*.

Аналитической таблицей **называется конечная или бесконечная последовательность строк I_1, I_2,..., в которой каждая строка I_n содержит конечное число списков формул языка логики предикатов, а каждая последующая строка I_{n+1} получается из предшествующей I_n заменой какого-нибудь списка формул на один или два новых списка формул на основании некоторого правила редукции.**

Введем далее два важных понятия – *замкнутого списка формул* и *замкнутой аналитической таблицы.*

Список формул **называется** ***замкнутым*****, если в его составе имеется некоторая формула C и ее отрицание ¬C.**

Аналитическая таблица **называется** ***замкнутой*****, если она содержит конечное число строк и каждый список формул, находящийся в последней строке таблицы, является замкнутым.**

Сформулируем, наконец, *критерии общезначимости формул и логического следования.*

Формула A ***общезначима*** **(⊨ A), если и только если существует замкнутая аналитическая таблица, первая строка которой содержит единственный список формул, состоящий из одной формулы – формулы ¬A.**

Из формул A_1, A_2,..., A_n ***логически следует*** **формула B (A_1, A_2,..., A_n ⊨ B), если и только если существует замкнутая аналитическая таблица, первая строка которой содержит единственный список формул, состоящий из формул A_1, A_2,..., A_n, ¬B.**

Описание аналитико-табличной процедуры завершено.

Прежде чем привести примеры построения аналитических таблиц, дадим ряд советов, облегчающих процесс обоснования указанным методом общезначимости формул и наличия между формулами отношения логического следования.

1. Правила редукции можно разделить на две группы. К первой относятся так называемые *пропозициональные правила* – [&], [¬&],

[$\vee$], [$\neg\vee$], [$\supset$], [$\neg\supset$], [$\neg\neg$]. Ко второй группе относятся так называемые *кванторные правила* – [$\forall$], [$\neg\forall$], [$\exists$], [$\neg\exists$]. При построении аналитической таблицы следует (при наличии соответствующей возможности) применять сначала пропозициональные, а затем кванторные правила редукции.

2. Среди пропозициональных правил редукции имеются правила двух типов: применение первых не увеличивает числа формульных списков в следующей строке таблицы (это правила [&], [$\neg\vee$], [$\neg\supset$], [$\neg\neg$]), применение вторых ведет к увеличению указанного числа (это правила [$\neg$&], [$\vee$], [$\supset$]). Аналитическая таблица будет менее громоздкой, если пропозициональные правила второго типа применять после того, как применены все возможные пропозициональные правила первого типа.

3. Среди кванторных правил редукции рекомендуется в первую очередь применять правила [$\neg\forall$] и [$\exists$], которые требуют введения новых предметных констант, и только потом правила [$\forall$] и [$\neg\exists$], не содержащие ограничений на терм **t**, подставляемый вместо подкванторной переменной. Причем в качестве **t** при применении правил [$\forall$] и [$\neg\exists$] к некоторому формульному списку некоторой строки таблицы следует выбирать замкнутый терм из числа тех, которые уже содержатся в формулах данного списка. Если же этот список не содержит замкнутых термов, то в качестве **t** выбирается произвольная индивидная константа.

Продемонстрируем сначала технику применения пропозициональных правил редукции. Обоснуем с использованием метода аналитических таблиц следующий тезис:

$$\mathbf{P(a)} \vee \mathbf{Q(b)},\ \mathbf{Q(b)} \supset \mathbf{R(c)} \models \mathbf{R(c)} \vee \mathbf{P(a)}.$$

Первая строка таблицы содержит единственный список формул, выражающий антитезис – допущение об истинности первых двух формул и ложности третьей:

$$1.\ \mathbf{P(a)} \vee \mathbf{Q(b)},\ \mathbf{Q(b)} \supset \mathbf{R(c)},\ \neg(\mathbf{R(c)} \vee \mathbf{P(a)}).$$

Первая формула списка имеет вид $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$, вторая – $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$, а третья – $\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$. Поэтому возможно использование одного из трех правил редукции – [$\vee$], [$\supset$], [$\neg\vee$]. Поскольку применение правил [$\vee$] и [$\supset$] приводит к увеличению числа формульных списков, а применение правила [$\neg\lor$] сохраняет их число, используем правило [$\neg\lor$]. Тогда вместо формулы $\neg(R(c) \lor P(a))$ в единственном формульном списке второй строки появятся две новые формулы – $\neg R(c)$ и $\neg P(a)$:

$$2.\ P(a) \lor Q(b),\ Q(b) \supset R(c),\ \neg R(c),\ \neg P(a).$$

Применим теперь правило [$\lor$]. В третьей строке таблицы возникнут два формульных списка, причем $P(a)$ войдет в первый из них, а $Q(b)$ – во второй. Остальные формулы строки 2 следует поместить в каждый из двух новых списков:

$$3.\ P(a),\ Q(b) \supset R(c),\ \neg R(c),\ \neg P(a)\ \Big|\ Q(b),\ Q(b) \supset R(c),\ \neg R(c),\ \neg P(a).$$

Первый формульный список строки 3 является замкнутым, так как содержит формулу $P(a)$ и ее отрицание $\neg P(a)$. Поэтому к данному списку нет необходимости применять в дальнейшем правила редукции. В последующих строках таблицы он будет просто повторяться. Ко второму списку строки 3 можно применить лишь правило [$\supset$]. Тогда в строке 4 вместо данного списка образуется два новых списка, в один из них помещается формула $\neg Q(b)$, а в другой – $R(c)$:

4.	$P(a),\ Q(b) \supset R(c),$ $\neg R(c),\ \neg P(a)$	$Q(b),\ \neg Q(b),$ $\neg R(c),\ \neg P(a)$	$Q(b),\ R(c),$ $\neg R(c),\ \neg P(a).$

Каждый из трех формульных списков строки 4 содержит некоторую формулу и ее отрицание: первый – $P(a)$ и $\neg P(a)$, второй – $Q(b)$ и $\neg Q(b)$, третий – $R(c)$ и $\neg R(c)$. Поэтому аналитическая таблица замкнута и исходный тезис считается обоснованным.

Приведем общий вид построенной нами аналитической таблицы. Под горизонтальными линиями, разделяющими соседние строки таблицы, указаны правила редукции, применяемые при переходе от верхней строки к нижней.

<table>
<tr><td colspan="3">$P(a) \lor Q(b),\ Q(b) \supset R(c),\ \neg(R(c) \lor P(a))$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">$P(a) \lor Q(b),\ Q(b) \supset R(c),\ \neg R(c),\ \neg P(a)$</td><td>[$\neg\lor$]</td></tr>
<tr><td>$P(a),\ Q(b) \supset R(c),\ \neg R(c),\ \neg P(a)$</td><td colspan="2">$Q(b),\ Q(b) \supset R(c),\ \neg R(c),\ \neg P(a)$</td><td>[$\lor$]</td></tr>
<tr><td>$P(a),\ Q(b) \supset R(c),\ \neg R(c),\ \neg P(a)$</td><td>$Q(b),\ \neg Q(b),$
$\neg R(c),\ \neg P(a)$</td><td>$Q(b),\ R(c),$
$\neg R(c),\ \neg P(a)$</td><td>[$\supset$]</td></tr>
</table>

Проиллюстрируем действие кванторных правил редукции на примере обоснования общезначимости формулы:

$$\exists x \forall y \mathbf{R}(x, y) \supset \forall y \exists x \mathbf{R}(x, y).$$

В первую строку таблицы помещаем допущение о ложности указанной формулы:

$$1.\ \neg(\exists x \forall y \mathbf{R}(x, y) \supset \forall y \exists x \mathbf{R}(x, y)).$$

Поскольку единственная формула строки имеет вид $\neg(\mathbf{A} \supset \mathbf{B})$, применяем правило $[\neg\supset]$:

$$2.\ \exists x \forall y \mathbf{R}(x, y), \neg\forall y \exists x \mathbf{R}(x, y).$$

Далее можно применить правило $[\exists]$ либо правило $[\neg\forall]$. Каждое из них требует введения новой предметной константы, поэтому порядок их применения не существен. Используем, например, правило $[\exists]$. Заменим в $\forall y \mathbf{R}(x, y)$ свободные вхождения переменной x, стоящей за квантором $\exists$ в формуле $\exists x \forall y \mathbf{R}(x, y)$, на предметную константу $\mathbf{a}$:

$$3.\ \forall y \mathbf{R}(\mathbf{a}, y), \neg\forall y \exists x \mathbf{R}(x, y).$$

Теперь можно применить либо правило $[\forall]$, либо $[\neg\forall]$, но первое из них не требует введения новой константы, а второе требует. Поэтому применяем правило $[\neg\forall]$. В формуле $\neg\exists x \mathbf{R}(x, y)$ переменную y необходимо заменить константой, не встречающейся в единственном списке формул строки 3, т. е. любой константой, за исключением $\mathbf{a}$. Заменим, например, y на $\mathbf{b}$:

$$4.\ \forall y \mathbf{R}(\mathbf{a}, y), \neg\exists x \mathbf{R}(x, \mathbf{b}).$$

На следующем шаге можно использовать любое из двух возможных правил – $[\forall]$ или $[\neg\exists]$, так как они оба не требуют введения новых констант. Используем правило $[\forall]$. В результате должна сохраниться формула $\forall y \mathbf{R}(\mathbf{a}, y)$ и добавиться $\mathbf{R}(\mathbf{a}, \mathbf{t})$, где $\mathbf{t}$ – любой замкнутый терм. Поскольку в формульном списке строки 4 содержатся два таких терма – предметные константы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, какую-то из них нужно выбрать в качестве $\mathbf{t}$. Нетрудно установить, что для достижения цели – получения в формульном списке формул вида $\mathbf{C}$ и $\neg\mathbf{C}$ – в качестве $\mathbf{t}$ следует взять константу $\mathbf{b}$:

$$5.\ \forall y \mathbf{R}(\mathbf{a}, y), \mathbf{R}(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \neg\exists x \mathbf{R}(x, \mathbf{b}).$$

Применим, наконец, правило [$\neg\exists$]. В результате формула $\neg\exists x\mathbf{R}(x, \mathbf{b})$ сохранится в списке, и к нему добавится формула вида $\neg\mathbf{R}(\mathbf{t}, \mathbf{b})$, где $\mathbf{t}$ – произвольный замкнутый терм. Очевидно, что в качестве $\mathbf{t}$ следует взять константу $\mathbf{a}$:

$$6.\ \forall y\mathbf{R}(\mathbf{a}, y),\ \mathbf{R}(\mathbf{a}, \mathbf{b}),\ \neg\exists x\mathbf{R}(x, \mathbf{b}),\ \neg\mathbf{R}(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Единственный формульный список строки 6 содержит формулу $\mathbf{R}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ вместе с ее отрицанием $\neg\mathbf{R}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, поэтому аналитическая таблица замкнута, и формула $\exists x\forall y\mathbf{R}(x, y) \supset \forall y\exists x\mathbf{R}(x, y)$ общезначима.

Итак, нами построена следующая аналитическая таблица:

$\neg(\exists x\forall y\mathbf{R}(x, y) \supset \forall y\exists x\mathbf{R}(x, y))$	
$\exists x\forall y\mathbf{R}(x, y), \neg\forall y\exists x\mathbf{R}(x, y)$	[$\neg\supset$]
$\forall y\mathbf{R}(\mathbf{a}, y), \neg\forall y\exists x\mathbf{R}(x, y)$	[$\exists$]
$\forall y\mathbf{R}(\mathbf{a}, y), \neg\exists x\mathbf{R}(x, \mathbf{b})$	[$\neg\forall$]
$\forall y\mathbf{R}(\mathbf{a}, y), \mathbf{R}(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \neg\exists x\mathbf{R}(x, \mathbf{b})$	[$\forall$]
$\forall y\mathbf{R}(\mathbf{a}, y), \mathbf{R}(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \neg\exists x\mathbf{R}(x, \mathbf{b}), \neg\mathbf{R}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$	[$\neg\exists$]

Мы показали, как применяется метод аналитических таблиц для обоснования общезначимости формул и наличия отношения логического следования. Возникает вопрос, может ли аналитико-табличная процедура быть использована для демонстрации необщезначимости формул и отсутствия логического следования между формулами.

В ряде случаев построенная аналитическая таблица может свидетельствовать о необщезначимости некоторой формулы $\mathbf{A}$ или о том, что из $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2,..., \mathbf{A}_n$ не следует логически $\mathbf{B}$. Это имеет место в том случае, когда первая строка таблицы включает единственный список, состоящий из формулы $\neg\mathbf{A}$ (или из формул $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2,..., \mathbf{A}_n, \neg\mathbf{B}$), а в самой таблице в некоторой строке имеется незамкнутый формульный список, к которому нельзя применить никакое правило редукции.

Рассмотрим в качестве примера аналитическую таблицу:

$\neg(\exists x\mathbf{P}(x) \supset \forall x\mathbf{P}(x))$	
$\exists x\mathbf{P}(x), \neg\forall x\mathbf{P}(x)$	[$\neg\supset$]
$\mathbf{P}(\mathbf{a}), \neg\forall x\mathbf{P}(x)$	[$\exists$]
$\mathbf{P}(\mathbf{a}), \neg\mathbf{P}(\mathbf{b})$	[$\neg\forall$]

Очевидно, что формульный список последней строки не содержит формул вида **C** и ¬**C**. Вместе с тем, дальнейшее применение правил редукции невозможно. Поэтому, так как таблица начиналась с формулы $\neg(\exists x\mathbf{P}(x) \supset \forall x\mathbf{P}(x))$, то эта таблица свидетельствует о необщезначимости формулы $\exists x\mathbf{P}(x) \supset \forall x\mathbf{P}(x)$.

Однако имеется и другая возможность. Аналитическая таблица, начинающаяся с формулы $\neg\mathbf{A}$ (или с формул $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2,..., \mathbf{A}_n, \neg\mathbf{B}$), на каждом шаге своего построения оказывается незамкнутой, но при этом остается возможность дальнейшего применения правил редукции для незамкнутых формульных списков. Указанная ситуация может возникнуть в силу специфики правил [$\forall$] и [$\neg\exists$], применение которых не устраняет из соответствующих списков кванторные формулы видов $\forall\alpha\mathbf{A}$ и $\neg\exists\alpha\mathbf{A}$.

Подобная аналитическая таблица может получиться в двух случаях: 1) если она в принципе не может замкнуться, сколь долго бы мы ее ни строили, т. е. когда **A** не является общезначимой формулой (или из $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2,..., \mathbf{A}_n$ не следует **B**); 2) если таблица не замыкается по причине того, что ее построение требует столь огромных ресурсов чернил, бумаги и времени, которые у нас отсутствуют. Поэтому в описанной только что ситуации делать однозначный вывод о необщезначимости **A** (или отсутствии следования **B** из $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2,..., \mathbf{A}_n$) нельзя.

Завершая рассмотрение классической логики предикатов первого порядка, приведем список схем наиболее важных законов этой логической теории – схем общезначимых формул.

1. *Законы удаления* $\forall$ *и введения* $\exists$:

   $\forall\alpha\mathbf{A} \supset \mathbf{A}(\mathbf{t})$,

   $\mathbf{A}(\mathbf{t}) \supset \exists\alpha\mathbf{A}$,

   где $\mathbf{A}(\mathbf{t})$ – результат замены всех свободных вхождений переменной α в формулу **A** на замкнутый терм **t**.

2. *Закон подчинения*:

   $\forall\alpha\mathbf{A} \supset \exists\alpha\mathbf{A}$.

3. *Закон непустоты предметной области*:

   $\exists\alpha\mathbf{A} \vee \exists\alpha\neg\mathbf{A}$.

4. *Законы пронесения и вынесения кванторов*:

$\forall\alpha(\mathbf{A}\ \&\ \mathbf{B}) \equiv (\forall\alpha\mathbf{A}\ \&\ \forall\alpha\mathbf{B})$,
$\exists\alpha(\mathbf{A}\ \&\ \mathbf{B}) \supset (\exists\alpha\mathbf{A}\ \&\ \exists\alpha\mathbf{B})$,
$\exists\alpha(\mathbf{A}\ \&\ \mathbf{B}) \equiv (\mathbf{A}\ \&\ \exists\alpha\mathbf{B})$, если α не свободна в **A**,
$\exists\alpha(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \equiv (\exists\alpha\mathbf{A} \vee \exists\alpha\mathbf{B})$,
$(\forall\alpha\mathbf{A} \vee \forall\alpha\mathbf{B}) \supset \forall\alpha(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$,
$\forall\alpha(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \equiv (\mathbf{A} \vee \forall\alpha\mathbf{B})$, если α не свободна в **A**,
$\forall\alpha(\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \supset (\forall\alpha\mathbf{A} \supset \forall\alpha\mathbf{B})$,
$\forall\alpha(\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \equiv (\mathbf{A} \supset \forall\alpha\mathbf{B})$, если α не свободна в **A**,
$\forall\alpha(\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \equiv (\exists\alpha\mathbf{A} \supset \mathbf{B})$, если α не свободна в **B**,
$(\exists\alpha\mathbf{A} \supset \exists\alpha\mathbf{B}) \supset \exists\alpha(\mathbf{A} \supset \mathbf{B})$,
$\exists\alpha(\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \equiv (\mathbf{A} \supset \exists\alpha\mathbf{B})$, если α не свободна в **A**,
$\exists\alpha(\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \equiv (\forall\alpha\mathbf{A} \supset \mathbf{B})$, если α не свободна в **B**,
$(\exists\alpha\mathbf{A} \supset \forall\alpha\mathbf{B}) \supset \forall\alpha(\mathbf{A} \supset \mathbf{B})$.

5. *Законы перестановки кванторов*:

$\forall\alpha\forall\beta\mathbf{A} \equiv \forall\beta\forall\alpha\mathbf{A}$,
$\exists\alpha\exists\beta\mathbf{A} \equiv \exists\beta\exists\alpha\mathbf{A}$,
$\exists\alpha\forall\beta\mathbf{A} \supset \forall\beta\exists\alpha\mathbf{A}$.

6. *Законы отрицания кванторов*:

$\neg\exists\alpha\mathbf{A} \equiv \forall\alpha\neg\mathbf{A}$,
$\neg\forall\alpha\mathbf{A} \equiv \exists\alpha\neg\mathbf{A}$.

7. *Законы взаимовыразимости кванторов*:

$\forall\alpha\mathbf{A} \equiv \neg\exists\alpha\neg\mathbf{A}$,
$\exists\alpha\mathbf{A} \equiv \neg\forall\alpha\neg\mathbf{A}$.

ГЛАВА IV

ДЕДУКТИВНЫЕ ВЫВОДЫ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

§1. Классическое исчисление высказываний

Логику часто определяют как науку о рассуждениях. Действительно, исследование рассуждений, их видов и способов входит в число основных задач этой науки. Тем не менее, рассмотренные до сих пор методы логического анализа касались проверки правильности или неправильности уже готовых рассуждений и не затрагивали вопроса о процедуре их осуществления. В данной главе будет описан механизм и правила построения дедуктивных рассуждений. Кроме дедуктивных, существует еще одна разновидность рассуждений, называемых правдоподобными. Что представляют собой последние, обсуждается в главе VIII.

В общем случае, как уже говорилось в первой главе, под *рассуждением* понимают процедуру обоснования некоторого высказывания путем последовательного, пошагового перехода от одних высказываний, принятых в качестве исходных, к другим. Исходные высказывания называются *посылками*, а последнее высказывание, полученное в данном процессе, – *заключением* рассуждения.

К числу *дедуктивных* относят те рассуждения, в которых все шаги осуществляются на основе правил, обеспечивающих в конечном итоге наличие отношения логического следования между посылками и заключением.

Правила, применяемые при построении дедуктивных рассуждений, называются *правилами вывода*.

Чтобы ответить теперь на вопрос, как конкретно строятся рассуждения дедуктивного типа, требуется развить некоторую специальную теорию – *теорию дедуктивного вывода*. Но прежде кратко охарактеризуем основные виды *теорий*.

Дедукция является теоретическим способом познания окружающего нас мира. Поэтому процедуры дедукции используются в том случае, когда для получения некоторого нового знания недостаточно эмпирических познавательных приемов (наблюдений, экспериментов, измерений). В этом своем качестве дедукция широко используется уже в обыденной жизни: ведь мы часто пытаемся отстоять посредством того или иного рассуждения свою точку зрения, убедить в ее истинности своего собеседника, пытаемся опровергнуть точку зрения оппонента и т. д. Однако наибольшее значение процедуры дедукции как теоретического метода исследования имеют, несомненно, при построении научного (теоретического) знания.

В зависимости от степени проясненности (выявленности) дедуктивных связей между отдельными утверждениями (высказываниями) теории различают несколько их типов. К первому типу относятся *содержательные теории.* В их составе дедукция если и используется, то лишь для связи некоторых отдельных положений теории. При этом исходные утверждения (посылки) в рассуждениях представляют собой некоторые допущения. Посылки не обязаны быть (и не всегда бывают) истинными, а потому любое предложение, которое дедуцируется с их использованием, считается не истинным, а *условно истинным*: заключительное высказывание (заключение) истинно при условии, что посылки являются истинными. Примерами содержательных теорий являются школьная арифметика, теория эволюции Дарвина, различного рода исторические и лингвистические концепции, а также логика высказываний и логика предикатов, описанные в предыдущих главах.

Другой тип составляют *формализованные теории.* К их числу относятся теории, совокупность утверждений которых представляет собой дедуктивно организованную систему: каждое утверждение теории дедуктивно выводится из некоторых первоначально принятых исходных утверждений. Последние называются *аксиомами*, а сами теории носят название *аксиоматизированных теорий.* Примерами их являются: небесная механика Ньютона, теория относительности Эйнштейна, квантовая механика, геометрия Евклида. В отличие от геометрии Евклида, формализованной более 2 тысяч лет назад, арифметика вплоть до XX века развивалась как содержательная теория, и только на рубеже XIX–XX веков она была формализована итальянским математиком Пеано.

Так как предполагается, что аксиомы представляют собой истинные высказывания о некоторой предметной области, все другие положения, дедуцируемые из них, тоже считаются истинными.

Формализованные теории – это уже хорошо организованные теории. Однако их недостатком является то обстоятельство, что в них специально не выделяются средства дедукции, а потому многие дедуктивные шаги осуществляются на интуитивном уровне, что приводит, во-первых, к пропуску значительного числа шагов в рассуждениях, а во-вторых, к недостаточно четкой фиксации всех аксиом, необходимых для получения других положений.

С этой точки зрения более совершенны *формальные теории* – теории, в которых оформляется (структурируется) не только само знание, но и средства его получения – логические законы и способы дедуктивных рассуждений. К таким теориям относятся очень многие математические теории – формальные теории множеств, формальная арифметика и др. Содержание формальных теорий часто фиксируется на специально созданном символическом языке, а все рассуждения в рамках этих теорий строятся как преобразования одних последовательностей символов в другие их последовательности. Такого рода теории называются *исчислениями.*

Среди последних особое место занимают *логические исчисления.* Их особенность состоит в том, что утверждениями указанных теорий являются логические законы. В данной главе будут построены два логических исчисления – *классическое исчисление высказываний* и *классическое исчисление предикатов первого порядка.*

Задача логических исчислений – выделение и систематизация обычных процедур рассуждений, используемых в теоретической деятельности людей. Однако рассуждения, которые строятся в рамках исчислений, не являются содержательными, так как они не представляют собой дедуцирования одних высказываний из других высказываний. Напротив, это будут *формальные рассуждения*, состоящие в выведении одних формул из других формул. Тем не менее, каждое такое формальное рассуждение можно трактовать как общую форму, *модель* различных содержательных рассуждений, имеющих ту же самую логическую структуру. Такая трактовка формальных рассуждений возможна благодаря тому, что формулы данных исчислений представляют собой *логические формы* высказываний.

Исчисления являются разновидностями формальных теорий. Но ниже будут построены не аксиоматические, а так называемые *натуральные логические исчисления.* Последние содержат только правила вывода и не содержат аксиом. Такая переформулировка логических теорий позволяет снабдить каждого ученого, работающего в той или иной области конкретных наук, совокупностью правил, на основе которых можно осуществлять переход от одних содержательных утверждений (высказываний) к другим. А это чрезвычайно важно, ведь ученого, работающего в конкретной области знания, логика интересует прежде всего как наука, формулирующая законные правила преобразования одних высказываний в другие. С этой точки зрения в натуральных логических исчислениях более естественно (более натурально) излагается логический аппарат, необходимый для осуществления содержательных рассуждений.

Логические исчисления формулируются в тех же формализованных языках, что и содержательные (семантические) логические теории. И в том, и в другом случае решаются одинаковые задачи – выделить среди формул языка класс логических законов и выделить совокупность форм правильных рассуждений. Однако методы решения указанных задач в логических системах этих двух типов существенно различаются. Если в содержательных логических теориях под логическим законом понимается общезначимая формула (формула, принимающая значение «истина» при любых интерпретациях нелогических символов), а критерием правильности умозаключения является наличие семантического отношения логического следования между его посылками и заключением, то в логических исчислениях осуществляется попытка *формализации* данных понятий. С этой целью здесь вводятся синтаксические аналоги понятия общезначимой формулы и отношения логического следования – понятие *теоремы* и *отношение выводимости*. Формулируется совокупность дедуктивных принципов, позволяющих переходить от одних последовательностей символов к другим. В соответствии с этими принципами строятся *доказательства* теорем исчисления (логических законов) и *выводы* логических форм заключений из логических форм посылок для установления корректности умозаключения.

Логическое исчисление S является *адекватной формализацией* содержательной логической теории T в том случае, если: (1) множество теорем S совпадает с классом формул, общезначимых в T, и (2) из формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$ в исчислении S выводима формула B тогда и только тогда, когда $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$ в содержательной теории T.

Перейдем теперь к систематическому построению *натурального классического исчисления высказываний.* Язык этого исчисления в точности совпадает с языком классической логики высказываний, рассмотренным в главе II.

Сформулируем дедуктивные принципы исчисления высказываний – *правила вывода.* Предварительно укажем, что все правила подразделяются на несколько основных типов. Они делятся на *правила введения* (будем помечать это индексом «**в**») и *правила исключения* (будем помечать это индексом «**и**») логических символов (констант). С другой стороны, все правила делятся на *однопосылочные* (над чертой пишется одна формула) и *двухпосылочные* (над чертой пишутся через запятую две формулы).

$$\&_{\text{в}}\ \frac{\mathbf{A}, \mathbf{B}}{\mathbf{A} \mathbin{\&} \mathbf{B}} \qquad\qquad \&_{\text{и}}\ \frac{\mathbf{A} \mathbin{\&} \mathbf{B}}{\mathbf{A}} \qquad \frac{\mathbf{A} \mathbin{\&} \mathbf{B}}{\mathbf{B}}$$

$$\vee_{\text{в}}\ \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{A} \vee \mathbf{B}} \qquad \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{A} \vee \mathbf{B}} \qquad\qquad \vee_{\text{и}}\ \frac{\mathbf{A} \vee \mathbf{B}, \neg\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$$

$$\supset_{\text{в}}\ \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{C} \supset \mathbf{B}}, \text{ где } \mathbf{C} \text{ – последняя посылка} \qquad \supset_{\text{и}}\ \frac{\mathbf{A} \supset \mathbf{B},\ \mathbf{A}}{\mathbf{B}}$$

$$\neg_{\text{в}}\ \frac{\mathbf{B}, \neg\mathbf{B}}{\neg\mathbf{C}}, \text{ где } \mathbf{C} \text{ – последняя посылка} \qquad \neg_{\text{и}}\ \frac{\neg\neg\mathbf{A}}{\mathbf{A}}$$

Каждое из указанных правил вывода представляет собой формулировку *разрешения* нечто осуществить, а именно, если даны формулы того вида, которые указаны выражениями, стоящими над чертой (*посылки правил*), то каждое правило разрешает записать после этого формулу того вида, которая указана выражением, стоящим под чертой (*заключение правила*).

Так, правило $\&_{\text{в}}$ (*введение конъюнкции*) является двухпосылочным. Оно позволяет, если даны произвольные две формулы **A** и **B**, объединить их в конъюнкцию – $\mathbf{A} \mathbin{\&} \mathbf{B}$. Пусть **A** будет формулой $(\mathbf{p} \supset \mathbf{q})$, а **B** – $(\mathbf{r} \vee \neg\mathbf{p})$, тогда, применяя к ним правило $\&_{\text{в}}$, можно получить формулу $(\mathbf{p} \supset \mathbf{q}) \mathbin{\&} (\mathbf{r} \vee \neg\mathbf{p})$.

Правила $\&_{\text{и}}$ (*исключение конъюнкции*) являются однопосылочными. Они позволяют, если дано конъюнктивное выражение вида $\mathbf{A} \mathbin{\&} \mathbf{B}$, выделить из него как *левый* член конъюнкции, так и *правый.* При применении сразу обоих правил конъюнкция «рассыпается» на составляющие ее члены.

Правила $\vee_{\text{в}}$ (*введения дизъюнкции*) являются тоже однопосылочными. Первое из них разрешает при наличии некоторой формулы **A** присоединить к ней дизъюнктивно справа любую (произвольную) формулу **B** и получить выражение вида $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$. Например, пусть **A** – это формула $(\mathbf{p} \supset \mathbf{q})$, тогда, применяя к ней рассматриваемое правило, можно получить любую формулу вида $(\mathbf{p} \supset \mathbf{q}) \vee \mathbf{B}$. Что это будет за конкретная формула, зависит от того, что взято в качестве формулы **B**. Правило же позволяет в качестве формулы **B** брать любую (какую угодно) формулу. Аналогично второе правило разрешает при наличии некоторой формулы **B** присоединить к ней слева произвольную формулу **A** и получить выражение вида $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$.

Правило $\vee_{\text{и}}$ (*исключение дизъюнкции*) является двухпосылочным. Действие по этому правилу состоит в том, что, имея дизъюнктивную формулу вида $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ и имея формулу вида $\neg\mathbf{A}$, которая является отрицанием (именно) *левого* члена дизъюнкции, нам разрешается перейти к формуле **B**, т. е. выделить *правый* член исходной дизъюнкции $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$. Это хорошо известное правило *tollendo ponens*. Рассмотрим пример. Пусть $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ есть формула $\neg\mathbf{p} \vee (\mathbf{q} \ \& \ \mathbf{r})$ и пусть $\neg\mathbf{A}$ есть формула $\neg\neg\mathbf{p}$. Так как формула $\neg\neg\mathbf{p}$ – это отрицание левого члена дизъюнкции, то по правилу $\vee_{\text{и}}$ можно получить формулу $(\mathbf{q} \ \& \ \mathbf{r})$ – правый член данной дизъюнкции.

Правило $\supset_{\text{и}}$ (*исключение импликации*) также двухпосылочно. Как и предыдущее, оно позволяет отделить правый член (консеквент) импликации $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ при условии, что у нас имеется формула **A**, совпадающая с антецедентом данной импликации. Это также хорошо известное правило *modus ponens*. Так, если $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ – это формула $(\mathbf{p} \supset \mathbf{q}) \supset (\mathbf{q} \ \& \ \mathbf{r})$ и **A** – это формула $(\mathbf{p} \supset \mathbf{q})$, то по правилу $\supset_{\text{и}}$ можно получить формулу $(\mathbf{q} \ \& \ \mathbf{r})$ – консеквент рассматриваемой импликации.

Правило $\neg_{\text{и}}$ (*исключение отрицания*) однопосылочно. Оно позволяет снимать два отрицания с любой формулы.

Особо остановимся на правилах $\supset_{\text{в}}$ (*введение импликации*) и $\neg_{\text{в}}$ (*введение отрицания*). Своеобразие их состоит в том, что формула **C** в заключениях этих правил – не любое выражение, а последнее допущение (посылка) в некотором рассуждении. Таким образом, формулировка этих правил соотносит их с тем рассуждением, которое будет строиться.

Правило $\supset_B$ является однопосылочным. Оно позволяет по любой формуле **B**, содержащейся в рассуждении, перейти к импликации вида **C** $\supset$ **B**, где на место антецедента ставится формула, которая в нашем рассуждении участвует в качестве последнего допущения, а на место консеквента помещается сама формула **B**.

Правило $\neg_B$ двухпосылочно и позволяет при обнаружении в рассуждении двух формул, противоречащих друг другу, – **B** и $\neg$**B** – перейти к формуле $\neg$**C**, которая является отрицанием последнего допущения, если таковым была формула **C**. Иначе говоря, это правило разрешает в строящееся рассуждение вводить отрицание последней посылки.

При применении любого из правил необходимо иметь в виду, что логические константы, указанные в правилах, являются всегда главными знаками формул. *Только к ним (и ничему иному) могут применяться правила.*

Посредством заданных правил можно строить формальные рассуждения двух видов – *выводы* и *доказательства.*

***Выводом* называется непустая конечная последовательность формул $C_1, C_2, ..., C_k$, удовлетворяющая условиям:**

(1) каждая C_i есть либо посылка, либо получена из предыдущих формул по одному из правил вывода;

(2) если в выводе применялись правила $\supset_B$ или $\neg_B$, то все формулы, начиная с последней посылки и вплоть до результата применения данного правила, исключаются из участия в дальнейших шагах вывода.

Последнее свойство (свойство исключенности некоторых формул из участия в дальнейшем построении вывода) означает, что эти формулы как бы «замораживаются» и изолируются в выводе. Для краткости будем их обозначать термином *исключенные формулы*, а ту посылку, которая при этом попадет в число исключенных формул, будем обозначать термином *исключенная посылка.* Тот факт, что некоторые формулы в выводе являются исключенными, будем обозначать вертикальной чертой. Как это конкретно делается, покажем далее на примерах.

Если дан вывод $C_1, C_2, ..., C_k$, т. е. дана последовательность формул, удовлетворяющая условиям (1) и (2), и если неисключенными посылками являются формулы $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2,..., \mathbf{A}_n$ и последняя формула последовательности $\mathbf{C}_k$ графически совпадает с формулой **B**, т. е. является формулой **B**, то про данную последовательность говорят, что она является выводом формулы **B** из посылок $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2,..., \mathbf{A}_n$. Этот факт обозначается посредством записи $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2,..., \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B}$ (выражение читается: «из посылок $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2,..., \mathbf{A}_n$ выводимо **B**»), где «$\vdash$» – *метазнак выводимости.*

Если множество формул **Г** содержит (кроме всего прочего) каждую из неисключенных посылок $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2,..., \mathbf{A}_n$, то в логике принято считать, что рассмотренная выше последовательность $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2,..., \mathbf{C}_k$ является также и выводом формулы **B** из множества формул **Г**, что обозначается записью $\mathbf{Г} \vdash \mathbf{B}$.

***Доказательство* есть вывод из пустого множества неисключенных посылок. Последняя формула в доказательстве называется *доказуемой формулой*, или *теоремой*.**

Пусть имеется доказательство $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2,..., \mathbf{C}_k$, и пусть $\mathbf{C}_k$ графически совпадает с формулой **B**. Будем тогда говорить, что данная последовательность есть доказательство формулы **B**. Этот факт обозначается посредством записи $\vdash \mathbf{B}$ (читается: «**B** – теорема»).

Выводы далее будем строить в виде последовательностей записанных друг под другом формул. Каждая формула такой последовательности нумеруется натуральными числами, которые используются в выводе как имена соответствующих формул. С каждой формулой связывается некоторая характеристика – ее *анализ*. Под *анализом вывода* имеется в виду указание того, на каком основании та или иная формула появилась в выводе. Напомним, что, согласно определению вывода, таких оснований может быть только два: либо формула является посылкой, либо она получена из предыдущих по некоторому правилу вывода.

Покажем теперь, что представляют собой вывод и доказательство на некоторых примерах. Допустим, что требуется обосновать метаутверждение о выводимости формулы **r** из посылок $\mathbf{p} \supset \mathbf{q}$, $\mathbf{q} \supset \mathbf{r}$ и **p**, т. е. обосновать метаутверждение: $\mathbf{p} \supset \mathbf{q}, \mathbf{q} \supset \mathbf{r}, \mathbf{p} \vdash \mathbf{r}$. Для этого необходимо построить вывод, в котором последняя формула графически совпадала бы с формулой **r**, а посылками оказались бы в точности формулы $\mathbf{p} \supset \mathbf{q}$, $\mathbf{q} \supset \mathbf{r}$ и **p**. Такая последовательность может быть построена, ею является, например, следующая последовательность:

1.	$\mathbf{p \supset q}$	– пос.
2.	$\mathbf{q \supset r}$	– пос.
3.	$\mathbf{p}$	– пос.
4.	$\mathbf{q}$	– $\supset_{\text{и}}$, 1, 3
5.	$\mathbf{r}$	– $\supset_{\text{и}}$, 2, 4

Действительно, данная последовательность удовлетворяет условиям (1) и (2) понятия вывода, а потому является выводом. Далее, последняя формула графически совпадает с $\mathbf{r}$, а неисключенными посылками являются в точности формулы $\mathbf{p \supset q}$, $\mathbf{q \supset r}$ и $\mathbf{p}$. Таким образом, построен вывод, обосновывающий метаутверждение о выводимости: $\mathbf{p \supset q, q \supset r, p \vdash r}$.

Обоснуем метаутверждение вида $\vdash \mathbf{(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))}$, т. е. утверждение о том, что указанная формула является теоремой.

1.	$\mathbf{p \supset q}$	– пос.
2.	$\mathbf{q \supset r}$	– пос.
3.	$\mathbf{p}$	– пос.
4.	$\mathbf{q}$	– $\supset_{\text{и}}$, 1, 3
5.	$\mathbf{r}$	– $\supset_{\text{и}}$, 2, 4
6.	$\mathbf{(p \supset r)}$	– $\supset_{\text{в}}$, 5
7.	$\mathbf{(q \supset r) \supset (p \supset r)}$	– $\supset_{\text{в}}$, 6
8.	$\mathbf{(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))}$	– $\supset_{\text{в}}$, 7

Анализ показывает, что эта последовательность удовлетворяет условиям (1) и (2) понятия вывода. Последняя формула графически совпадает с формулой, которую необходимо было получить в заключении. Все посылки исключены, т. е. множество неисключенных посылок пусто. Поэтому данная последовательность является доказательством теоремы $\mathbf{(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))}$.

При сравнении этой последовательности с предыдущей легко видеть, что первые 5 шагов у них одинаковы. Если бы доказательство было прервано на 5-м шаге, то обосновывалась бы лишь выводимость вида $\mathbf{p \supset q, q \supset r, p \vdash r}$. Однако вывод был продолжен, и на 6-м шаге применялось правило $\supset_{\text{в}}$ к формуле 5. Это правило разрешает получить формулу $\mathbf{C \supset B}$, где $\mathbf{C}$ – последняя посылка, а $\mathbf{B}$ – 5-я формула. Такого вида формула и записана на 6-м шаге. В понятии вывода указано, что при применении правила $\supset_{\text{в}}$ из дальнейших шагов вывода исключаются все формулы, начиная с последней посылки и вплоть до результата применения этого правила, т. е. в нашем случае с 3-й до 6-й формул. Этот факт отмечен в выводе чертой, начинающейся с 3-й формулы и оконченной на 5-й. Если бы вывод был «оборван» на 6-м шаге, то обосновывалась бы выводимость вида $\mathbf{p \supset q, q \supset r \vdash p \supset r}$. Но вывод был продолжен далее применением правила $\supset_{\text{в}}$ теперь уже к 6-й формуле, и мы вновь получаем формулу $\mathbf{C \supset B}$, где $\mathbf{C}$ – последняя посылка (после исключения из числа посылок формулы $\mathbf{p}$ таковой стала формула $\mathbf{q \supset r}$). При применении правила $\supset_{\text{в}}$ из участия в дальнейших шагах вывода исключаются все формулы со 2-й до 7-й. Если бы вывод закончился на шаге 7, то была бы обоснована выводимость $\mathbf{p \supset q \vdash (q \supset r) \supset (p \supset r)}$. На последнем, 8-м шаге, аналогичным образом, применяя $\supset_{\text{в}}$ к 7-й формуле, исключаем последнюю посылку и получаем обоснование выводимости из пустого множества неисключенных посылок формулы $\mathbf{(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))}$.

Одну и ту же формулу можно обосновывать по-разному. Важно лишь, чтобы неисключенными посылками были те формулы, которые присутствуют в качестве посылок в метаутверждении о выводимости, а последняя формула совпала с заключением метаутверждения. Так, следующая последовательность также доказывает формулу $\mathbf{(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))}$.

1. $\mathbf{p \supset q}$ – пос.
2. $\mathbf{q \supset r}$ – пос.
3. $\mathbf{p}$ – пос.
4. $\mathbf{\neg r}$ – пос.
5. $\mathbf{q}$ – $\supset_{\text{и}}$, 1, 3
6. $\mathbf{r}$ – $\supset_{\text{и}}$, 2, 5
7. $\mathbf{\neg\neg r}$ – $\neg_{\text{в}}$, 4, 6
8. $\mathbf{r}$ – $\neg_{\text{и}}$, 7
9. $\mathbf{p \supset r}$ – $\supset_{\text{в}}$, 8
10. $\mathbf{(q \supset r) \supset (p \supset r)}$ – $\supset_{\text{в}}$, 9
11. $\mathbf{(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))}$ – $\supset_{\text{в}}$, 10

Данная последовательность отличается от предыдущей тем, что на 4-м шаге берется еще одна посылка – $\mathbf{\neg r}$. Осуществляя шаги вывода, на 6-м шаге получаем $\mathbf{r}$. Теперь в выводе появились две формулы вида **B** и $\neg$**B**. Это позволяет применить к ним правило $\neg_{\text{в}}$. По этому правилу, при наличии противоречия можно поместить в вывод формулу $\neg$**C**, где **C** – последняя посылка. Так как последней посылкой является формула 4 – $\neg$**r**, то записываем отрицание этой формулы, т. е. формулу $\neg\neg$**r**. Кроме того, при применении правила $\neg_{\text{в}}$, согласно понятию вывода, необходимо исключить из участия в дальнейших шагах вывода все формулы, начиная с последней посылки и вплоть до результата применения этого правила, что и показано чертой. На 8-м шаге к 7-й формуле применялось правило $\neg_{\text{и}}$, которое позволяет снять два знака отрицания и получить формулу **r**. Дальнейшие шаги вывода в точности повторяют шаги предыдущего доказательства и состоят в последовательном исключении оставшихся посылок применением правила $\supset_{\text{в}}$.

Рассмотрим еще один пример доказательства. Обоснуем, что формула $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \supset (\mathbf{q} \vee \mathbf{p})$ выводима из пустого множества посылок. Обосновывающей будет следующая последовательность:

1.	$\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$	– пос.
2.	$\neg(\mathbf{q} \vee \mathbf{p})$	– пос.
3.	$\neg\mathbf{p}$	– пос.
4.	$\mathbf{q}$	– $\vee_{\text{и}}$, 1, 3
5.	$\mathbf{q} \vee \mathbf{p}$	– $\vee_{\text{в}}$, 4
6.	$\neg\neg\mathbf{p}$	– $\neg_{\text{в}}$, 2, 5
7.	$\mathbf{p}$	– $\neg_{\text{и}}$, 6
8.	$\mathbf{q} \vee \mathbf{p}$	– $\vee_{\text{в}}$, 7
9.	$\neg\neg(\mathbf{q} \vee \mathbf{p})$	– $\neg_{\text{в}}$, 2, 8
10.	$\mathbf{q} \vee \mathbf{p}$	– $\neg_{\text{и}}$, 9
11.	$(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \supset (\mathbf{q} \vee \mathbf{p})$	– $\supset_{\text{в}}$, 10

Анализ показывает, что данная последовательность есть доказательство формулы $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \supset (\mathbf{q} \vee \mathbf{p})$. Здесь в качестве посылок были взяты формулы 1, 2, 3. Из этих формул на 5-м шаге была получена формула $(\mathbf{q} \vee \mathbf{p})$, которая противоречит формуле 2. Это позволяет применить правило $\neg_{\text{в}}$, согласно которому в выводе можно записать отрицание последней посылки. Тем самым получаем формулу 5 – $\neg\neg$**p**. При этом из дальнейших шагов вывода исключаются формулы, начиная с 3-й по 5-ю. Действуя далее, на 8-м шаге вновь получаем формулу, противоречащую формуле 2. Это дает возможность по правилу $\neg_B$ исключить еще одну посылку. Продолжая вывод, на 11-м шаге применением правила $\supset_B$ исключаем последнюю посылку. Тем самым доказательство требуемого заключения завершено.

Построение выводов и доказательств является творческой задачей, состоящей в нахождении нужной последовательности формул, если речь идет о формальном выводе, или нахождении нужной последовательности содержательных утверждений, если речь идет о содержательном выводе. Творческой задачей является и поиск посылок в том случае, когда обосновывается метаутверждение о выводимости некоторой формулы из пустого их множества. Обычно указывают, что в качестве посылок можно брать любые формулы. И это действительно так, но с одной оговоркой: необходимо в дальнейших шагах вывода, применяя правила, суметь исключить все дополнительные посылки, которые были введены.

Чтобы выбор нужных для вывода посылок не был случайным и не носил характера простого перебора различных возможностей, можно сформулировать некоторые эвристические приемы, которые будем называть далее эвристиками. *Эвристика* – это то, что позволяет уменьшить число переборов.

Пусть требуется обосновать метаутверждение о выводимости вида:

$$\mathbf{A_1, A_2, \dots, A_n \vdash (C_1 \supset (C_2 \supset (C_3 \supset \dots \supset (C_m \supset B)\dots)))}.$$

Тогда в качестве посылок необходимо, конечно же, взять формулы $\mathbf{A_1, A_2, \dots, A_n}$, которые уже предложены нам как посылки. Далее выбор дополнительных посылок осуществляется по следующим эвристикам.

1-я эвристика. Рассматривается формула, стоящая справа от знака выводимости «$\vdash$» и являющаяся *целью вывода*, т. е. рассматривается та формула, которую требуется вывести из посылок $\mathbf{A_1, A_2, \dots, A_n}$. Осуществляется поиск в ней главного знака (понятие главного знака формулы было введено в предыдущих главах). Если главным знаком является «$\supset$», т. е. формула «распадается» на антецедент и консеквент, то антецедент данной импликации берется в качестве дополнительной посылки, а целью вывода становится оставшийся от формулы ее консеквент. В нашем случае справа от знака «$\vdash$» стоит формула:

$$(\mathbf{C_1} \supset (\mathbf{C_2} \supset (\mathbf{C_3} \supset \ldots \supset (\mathbf{C_m} \supset \mathbf{B})\ldots))),$$

в которой антецедентом является формула $\mathbf{C_1}$, а консеквентом – формула $(\mathbf{C_2} \supset (\mathbf{C_3} \supset \ldots \supset (\mathbf{C_m} \supset \mathbf{B})\ldots))$. Применяя первую эвристику, заключаем, что к формулам $\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \ldots, \mathbf{A_n}$ можно присоединить в качестве дополнительной посылки формулу $\mathbf{C_1}$, а в качестве новой цели вывода взять формулу $(\mathbf{C_2} \supset (\mathbf{C_3} \supset \ldots \supset (\mathbf{C_m} \supset \mathbf{B})\ldots))$.

Из анализа последней формулы видно, что она опять-таки имеет в качестве главного знака импликацию и распадается на антецедент – формулу $\mathbf{C_2}$ – и консеквент – формулу $(\mathbf{C_3} \supset \ldots \supset (\mathbf{C_m} \supset \mathbf{B})\ldots)$. Поэтому к этой последней формуле вновь можно применить 1-ю эвристику. Тогда в качестве очередной дополнительной посылки берем формулу $\mathbf{C_2}$, а целью вывода становится формула $(\mathbf{C_3} \supset \ldots \supset (\mathbf{C_m} \supset \mathbf{B})\ldots)$.

Первую эвристику необходимо применять до тех пор, пока остающаяся в консеквенте формула имеет в качестве главного знака «$\supset$», т. е. до тех пор, пока мы не дойдем до формулы, которая уже не имеет вида импликации. В нашем случае таковой будет формула **B**. На этой формуле работа по 1-й эвристике заканчивается.

Итак, применение 1-й эвристики позволяет выбрать в качестве дополнительных посылок все антецеденты $\mathbf{C_1}, \mathbf{C_2}, \mathbf{C_3}, \ldots, \mathbf{C_m}$ из формулы $(\mathbf{C_1} \supset (\mathbf{C_2} \supset (\mathbf{C_3} \supset \ldots \supset (\mathbf{C_m} \supset \mathbf{B})\ldots)))$. После этого можно попытаться осуществить вывод вида:

$$\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \ldots, \mathbf{A_n}, \mathbf{C_1}, \mathbf{C_2}, \mathbf{C_3}, \ldots, \mathbf{C_m} \vdash \mathbf{B}.$$

Формула **B** в этом случае является *целью*, к которой надо стремиться при осуществлении вывода из посылок $\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \ldots, \mathbf{A_n}, \mathbf{C_1}, \mathbf{C_2}, \mathbf{C_3}, \ldots, \mathbf{C_m}$. Если этой цели удается достигнуть, то, применяя последовательно правило $\supset_\mathbf{B}$ для исключения дополнительных посылок, можно получить и обоснование вывода вида:

$$\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \ldots, \mathbf{A_n} \vdash (\mathbf{C_1} \supset (\mathbf{C_2} \supset (\mathbf{C_3} \supset \ldots \supset (\mathbf{C_m} \supset \mathbf{B})\ldots))).$$

Вывод, в котором при выборе дополнительных посылок использовалась только 1-я эвристика, называется *прямым выводом.*

Это означает, что под прямым выводом понимается любой вывод, в котором не применялось правило $\neg_\mathbf{B}$. Отметим, что именно 1-я эвристика была применена для выбора дополнительных посылок при построении первого доказательства формулы $(\mathbf{p} \supset \mathbf{q}) \supset ((\mathbf{q} \supset \mathbf{r}) \supset (\mathbf{p} \supset \mathbf{r}))$, а потому данное доказательство является прямым.

Эвристика 1 является весьма мощным средством упрощения процедуры поиска нужных посылок для вывода, однако она во многих случаях недостаточна. Поэтому ниже формулируется еще одна эвристика, которая в обязательном порядке применяется только после применения 1-й эвристики.

2-я эвристика. Итак, последовательное применение 1-й эвристики позволило дойти до формулы **B**, которая уже не является импликативной формулой. Именно эту формулу надо стремиться получить при прямом выводе из посылок $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2,..., \mathbf{A}_n, \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3,..., \mathbf{C}_m$. Однако, если такой вывод не удается сделать, то в качестве еще одной дополнительной посылки следует взять отрицание формулы **B**. Тем самым мы переходим к выводу от противного. Общий список посылок в этом случае будет выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2,..., \mathbf{A}_n, \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3,..., \mathbf{C}_m, \neg\mathbf{B}.$$

Целью вывода теперь становится получение в его составе противоречия, т. е. получения в выводе двух формул вида **D** и $\neg\mathbf{D}$. Если это удается сделать, то, применяя правило $\neg_\text{в}$, можно получить формулу $\neg\neg\mathbf{B}$, исключив при этом дополнительную посылку $\neg\mathbf{B}$. Применяя далее правило $\neg_\text{и}$, можно получить формулу **B** и тем самым обосновать выводимость:

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2,..., \mathbf{A}_n, \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3,..., \mathbf{C}_m \vdash \mathbf{B}.$$

После этого, применяя нужное число раз правило $\supset_\text{в}$, можно получить и требуемый вывод вида:

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2,..., \mathbf{A}_n \vdash (\mathbf{C}_1 \supset (\mathbf{C}_2 \supset (\mathbf{C}_3 \supset ... \supset (\mathbf{C}_m \supset \mathbf{B})...))).$$

Вывод, в котором применяется правило $\neg_\text{в}$, называется *косвенным выводом*, а именно – *выводом от противного.*

Так, во втором приведенном выше примере обоснования утверждения $(\mathbf{p} \supset \mathbf{q}) \supset ((\mathbf{q} \supset \mathbf{r}) \supset (\mathbf{p} \supset \mathbf{r}))$ был как раз применен метод построения вывода от противного, основанный на использовании эвристики 2.

К приведенным двум эвристикам можно было бы добавить и ряд других эвристических приемов. Не расширяя, однако, значительно этот список, укажем лишь еще две эвристики. Они применяются в обязательном порядке только после применения 1-й и 2-й эвристик.

3-я эвристика. Она касается дизъюнктивной формулы. Если в выводе имеется формула вида $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ или же вида $\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$, то в качестве дополнительной посылки (в первом случае) можно взять формулу $\neg\mathbf{A}$ из дизъюнктивного выражения $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ и после этого получить по $\vee_\text{И}$ формулу $\mathbf{B}$, или же взять в качестве посылки (во втором случае) формулу $\mathbf{A}$ и вывести по правилу $\vee_\text{В}$ противоречие. Иногда при доказательстве некоторых формул требуется взять в качестве посылки и формулу $\mathbf{B}$ и также попытаться вывести противоречие. Вообще, целью вывода остается получение противоречия до тех пор, пока не будет устранена посылка, в силу принятия которой мы переходим к доказательству от противного. Именно используя данную эвристику в примере с доказательством формулы $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \supset (\mathbf{q} \vee \mathbf{p})$, мы выбрали в качестве посылки 3-ю формулу $\neg\mathbf{p}$.

4-я эвристика. Если в выводе имеется формула вида $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$, то в качестве дополнительной посылки можно взять формулу $\neg\mathbf{A}$. После этого надо стремится получить противоречие, так как и эта эвристика применяется только после применения 2-й эвристики. Ясно, что при достижении противоречия мы сможем получить формулу $\neg\neg\mathbf{A}$, а далее, применяя правило снятия двойного отрицания, получить формулу $\mathbf{A}$, после чего по modus ponens к $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ и $\mathbf{A}$, мы сможем вывести и формулу $\mathbf{B}$.

Приведем еще несколько примеров выводов и доказательств.

$\vdash \mathbf{p} \supset \mathbf{p}$.

1. $\mathbf{p}$ – пос.
2. $\mathbf{p} \supset \mathbf{p}$ – $\supset_\text{В}$, 1

$\mathbf{p} \supset \mathbf{q}, \mathbf{r} \supset \mathbf{s} \vdash (\neg\mathbf{q} \vee \neg\mathbf{s}) \supset (\neg\mathbf{p} \vee \neg\mathbf{r})$.

Обоснованием данного метаутверждения о выводимости является, например, следующая последовательность формул:

1.	$p \supset q$	– пос.
2.	$r \supset s$	– пос.
3.	$\neg q \vee \neg s$	– пос.
4.	$\neg(\neg p \vee \neg r)$	– пос.
5.	$\neg p$	– пос.
6.	$\neg p \vee \neg r$	– $\vee$в, 5
7.	$\neg\neg p$	– $\neg$в, 4, 6
8.	p	– $\neg$и, 7
9.	q	– $\supset$и, 1, 8
10.	$\neg r$	– пос.
11.	$\neg p \vee \neg r$	– $\vee$в, 10
12.	$\neg\neg r$	– $\neg$в, 4, 11
13.	r	– $\neg$и, 12
14.	s	– $\supset$и, 2, 13
15.	$\neg\neg q$	– пос.
16.	$\neg s$	– $\vee$и, 3, 15
17.	$\neg\neg\neg q$	– $\neg$в, 14, 16
18.	$\neg q$	– $\neg$и, 17
19.	$\neg\neg(\neg p \vee \neg r)$	– $\neg$в, 9, 18
20.	$\neg p \vee \neg r$	– $\neg$и, 19
21.	$(\neg q \vee \neg s) \supset (\neg p \vee \neg r)$	– $\supset$в, 20

Здесь формула 3 является результатом применения эвристики 1 к формуле $(\neg q \vee \neg s) \supset (\neg p \vee \neg r)$, формула 4 – результатом применения эвристики 2 к формуле $(\neg p \vee \neg r)$, формула 5 появилась на основании эвристики 4, примененной к формуле 1. Формула 10 – на основании опять-таки эвристики 4, примененной к формуле 2. Наконец, формула 15 взята в качестве посылки на основе эвристики 3, примененной к формуле 3.

Обоснуем теперь доказательство формулы:

$$\vdash (p \,\&\, q) \supset \neg(\neg p \vee \neg q).$$

1.	$p \,\&\, q$	– пос.
2.	$\neg\neg(\neg p \vee \neg q)$	– пос.
3.	p	– &и, 1
4.	q	– &и, 1

5.	$\neg p \vee \neg q$	– $\neg$и, 2
6.	$\neg\neg p$	– пос.
7.	$\neg q$	– $\vee$и, 5, 6
8.	$\neg\neg\neg p$	– $\neg$в, 4, 7
9.	$\neg p$	– $\neg$и, 8
10.	$\neg\neg\neg(\neg p \vee \neg q)$	– $\neg$в, 3, 9
11.	$\neg(\neg p \vee \neg q)$	– $\neg$и, 10
12.	$(p \,\&\, q) \supset \neg(\neg p \vee \neg q)$	– $\supset$в, 11

В последнем примере в качестве второй посылки можно было бы взять не формулу $\neg\neg(\neg p \vee \neg q)$, а сразу формулу $(\neg p \vee \neg q)$, что несколько сократило бы вывод. Вообще, если после применения 1-й эвристики целью вывода стало получение формулы вида $\neg\mathbf{B}$, то в качестве дополнительной посылки, берущейся по 2-й эвристике, можно взять не формулу $\neg\neg\mathbf{B}$, а формулу $\mathbf{B}$.

Рассмотрим теперь одну метатеоретическую проблему. Используя табличный метод установления для формул пропозициональной логики отношения *логического следования*, можно показать, что в основе всех принятых в исчислении правил лежат отношения логического следования. Это означает, что, например, в основе правила $\&_В$: $\mathbf{A}, \mathbf{B} \vdash \mathbf{A} \,\&\, \mathbf{B}$ лежит отношение логического следования вида $\mathbf{A}, \mathbf{B} \models \mathbf{A} \,\&\, \mathbf{B}$, а в основе правила $\supset_В$: $\mathbf{B} \vdash \mathbf{C} \supset \mathbf{B}$ лежит отношение логического следования вида $\mathbf{B} \models \mathbf{C} \supset \mathbf{B}$ и т. д. Следовательно, принятые в исчислении высказываний правила при содержательном их применении гарантируют всегда получение истинных заключений, если выбранные посылки являются истинными утверждениями, т. е. построенное исчисление является непротиворечивым. Вообще, для него можно обосновать следующее метаутверждение:

$\mathbf{A}_1,\ldots, \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B}$ **тогда и только тогда, когда** $\mathbf{A}_1,\ldots, \mathbf{A}_n \models \mathbf{B}$.

Это говорит о том, что данное исчисление адекватно формализует содержательное отношение логического следования, а тем самым оно формализует и содержательное понятие логического закона. Таким образом, дедуктивные средства, используемые в исчислении, хорошо обоснованы, и мы можем им полностью доверять.

В завершение отметим, что в том случае, когда требуется обосновать выводимость, в посылки или заключение которой входят логические константы, отсутствующие в алфавите исчисления, например, входят знаки $\equiv$, $\underline{\vee}$ или $\downarrow$, то соответствующие формулы должны быть преобразованы таким образом, чтобы в них содержались только принятые в исчислении символы. Для этого необходимо воспользоваться указанными в главе II определениями и заменить эти знаки на знаки &, $\vee$, $\supset$ и $\neg$.

§2. Классическое исчисление предикатов первого порядка

Логические средства, используемые в исчислении высказываний для построения рассуждений, являются слишком бедными, чтобы с их помощью можно было описать огромное многообразие различных приемов, применяемых в процедурах дедукции в конкретных науках и повседневной жизни. Эти средства ограничены бедностью языка исчисления высказываний, в котором простые предложения трактуются как не имеющие внутренней структуры. С этой точки зрения, язык исчисления предикатов обладает гораздо бóльшими выразительными возможностями и позволяет анализировать и изучать такие рассуждения, которые зависят от внутренней структуры простых предложений.

Так как язык исчисления предикатов совпадает с языком логики предикатов, который был описан в предыдущей главе, перейдем сразу же к формулировке дедуктивной части исчисления.

В исчислении предикатов сохраняются все правила вывода исчисления высказываний, но к ним теперь надо присоединить новые правила, позволяющие оперировать с кванторами.

Кванторные правила вывода:

$$\forall_{\text{в}}\ \frac{\mathbf{A}(\alpha/\beta, \gamma_1,\ldots,\gamma_n)}{\forall\alpha\mathbf{A}(\alpha, \gamma_1,\ldots,\gamma_n)}, \text{ где } \beta \text{ – абс. огр.; } \beta \text{ огр. } \gamma_1,\ldots,\gamma_n$$

$$\exists_{\text{в}}\ \frac{\mathbf{A}(\alpha/\mathbf{t})}{\exists\alpha\mathbf{A}(\alpha)}$$

$$\forall_{\text{и}}\ \frac{\forall\alpha\mathbf{A}(\alpha)}{\mathbf{A}(\alpha/\mathbf{t})}$$

$$\exists_{И} \quad \frac{\exists\alpha \mathbf{A}(\alpha, \gamma_1,..., \gamma_n)}{\mathbf{A}(\alpha/\beta, \gamma_1,..., \gamma_n)}, \text{ где } \beta - \text{абс. огр.; } \beta \text{ огр. } \gamma_1,\ldots, \gamma_n$$

Для понимания этих правил разъясним, что в их формулировке означает выражение вида $\mathbf{A}(\alpha/\mathbf{t})$, а также частный случай этого выражения – $\mathbf{A}(\alpha/\beta, \gamma_1,..., \gamma_n)$.

Под выражением $\mathbf{A}(\alpha/\mathbf{t})$ имеют в виду результат *правильной подстановки* в формулу $\mathbf{A}(\alpha)$ вместо всех свободных вхождений переменной α терма $\mathbf{t}$.

***Подстановка является правильной*, если число вхождений любой связанной переменной, определенное для формулы $\mathbf{A}(\alpha)$, осталось неизменным и после подстановки.**

Важность наличия правильной подстановки разъясним на примере прикладного языка логики предикатов, в качестве которого будем использовать язык математики.

Пусть $\mathbf{A}(x, z)$ есть выражение $\exists y(x < y \ \& \ x = z)$. Переменная x в нем имеет два свободных вхождения. Пусть вместо x подставляется один из следующих термов: 5 – индивидная (предметная) константа, z – индивидная переменная, $(x + z)$ – сложный функциональный терм. Тогда выражение $\mathbf{A}(x/\mathbf{t}, z)$ в каждом из этих случаев графически совпадает со следующими, соответственно, выражениями:

$\mathbf{A}(x/5, z)$:	$\exists y(5 < y \ \& \ 5 = z)$,
$\mathbf{A}(x/z, z)$:	$\exists y(z < y \ \& \ z = z)$,
$\mathbf{A}(x/(x + z), z)$:	$\exists y((x + z) < y \ \& \ (x + z) = z)$.

Все данные подстановки являются правильными. В самом деле, в исходном выражении $\exists y(x < y \ \& \ x = z)$ лишь одна переменная y имеет два связанных вхождения – одно сразу после квантора существования и второе – в области действия данного квантора. В результате же подстановки мы получили формулы, в каждой из которых количество связанных вхождений переменной y не изменилось.

Нарушение требования правильности подстановки ведет к некорректным, с точки зрения семантики, следствиям. Приведем в этой связи пример неправильной подстановки.

Пусть, как и ранее, $\mathbf{A}(x, z)$ графически совпадает с выражением $\exists y(x < y \ \& \ x = z)$. Допустим для определенности, что приписывание значений индивидным переменным осуществляется, как и прежде, в универсуме натуральных чисел. Тогда, с семантической точки зрения, эта формула является *выполнимой*, т. е. при определенном приписывании φ значений свободным индивидным переменным данное утверждение может принять значение «истина». Так, если x и z приписать в качестве значения число 5, то формула $\exists y(x < y \mathbin{\&} x = z)$ будет утверждать существование среди натуральных чисел такого числа y, которое больше 5 и 5 = 5. Ясно, что это утверждение является истинным.

Рассмотрим теперь результат следующей подстановки:

$$\mathbf{A}(x/y + 2): \qquad \exists y(\underline{y} + 2 < y \mathbin{\&} \underline{y} + 2 = z).$$

Здесь подставляемый терм **t**, который графически совпадает с термом $y + 2$, содержит переменную y. После подстановки эта переменная оказалась связанной квантором существования и потому число связанных вхождений y увеличилось: было два вхождения, а стало четыре (места новых вхождений отмечены чертой). Рассматривая данное выражение, легко установить, что оно является *всегда ложным* утверждением о натуральных числах. В самом деле, какие бы на множестве натуральных чисел мы ни приписали значения переменной y, нам не удастся сделать выражение $y + 2 < y$ истинным. Поэтому первый член конъюнкции является всегда ложным, а в силу этого и вся конъюнкция должна быть ложной. В данном случае подстановка оказалась семантически некорректной.

Выражение вида $\mathbf{A}(\alpha/\beta, \gamma_1,..., \gamma_n)$ является метаязыковой записью частного случая результата правильной подстановки в $\mathbf{A}(\alpha, \gamma_1,..., \gamma_n)$ вместо всех свободных вхождений индивидной переменной α индивидной переменной β.

Обсудим теперь более подробно кванторные правила.

Правило $\forall_И$ (исключение квантора общности) есть разрешение перейти от формулы вида $\forall\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ к формуле $\mathbf{A}(\alpha/\mathbf{t})$. Чтобы осуществить это действие, надо устранить квантор общности, а в оставшейся формуле $\mathbf{A}(\alpha)$ сделать подстановку вместо всех свободных вхождений переменной α терма **t**. Так как в $\mathbf{A}(\alpha)$ могут входить кванторы, при осуществлении подстановки надо следить, чтобы она была правильной. В противном случае можно от истинных утверждений перейти к ложным. Например, выражение прикладного языка предикатов $\forall x \exists y(x < y)$, где x и y трактуются как пробегающие по множеству натуральных чисел, говорит об отсутствии среди них наибольшего числа и является истинным утверждением. Некорректно осуществляя применение правила $\forall_И$, можно от этого истинного утверждения перейти к ложному – $\exists y(\underline{y} < y)$. Здесь число связанных вхождений переменной y увеличилось на одно вхождение (новое вхождение переменной y помечено чертой).

Правило $\exists_В$ (введение квантора существования) разрешает от формулы $\mathbf{A}(\alpha/\mathbf{t})$ перейти к формуле $\exists\alpha\mathbf{A}(\alpha)$. Здесь опять-таки надо следить, чтобы посылка правила была результатом соответствующей правильной подстановки. Несоблюдение этого условия может привести к ложному заключению. Действительно, возьмем выражение прикладного языка предикатов $5 < y$. Применяя неправильно правило $\exists_В$, получаем ложное утверждение $\exists y(y < y)$. Почему так получилось? Дело заключается в том, что в данном применении правила $\exists_В$ к выражению $5 < y$ последнее трактовалось как, якобы, результат правильной подстановки в выражение $y < y$ терма 5 вместо переменной y. Но результатом такой подстановки должно быть выражение $5 < 5$, а не $5 < y$, так как подстановка всегда осуществляется вместо всех вхождений свободной индивидной переменной. Таким образом, выражение $5 < y$ нельзя понимать как $\mathbf{A}(y/5)$, а потому и переход к $\exists y\mathbf{A}(y)$ неправилен. С другой стороны, $5 < y$ можно понимать как $\mathbf{A}(x/5)$, т. е. как результат теперь уже правильной подстановки в $x < y$ вместо всех вхождений свободной переменной x терма 5. В этом случае, применяя правило $\exists_В$, получим $\exists x(x < y)$.

Прежде чем перейти к обсуждению правил $\forall_В$ и $\exists_И$, остановимся предварительно на смысле той информации, которая связывается с этими правилами и выражается посредством указания: «β – абс. огр.; β огр. $\gamma_1,\dots, \gamma_n$».

С семантической точки зрения, свободные индивидные переменные трактуются как пробегающие по некоторой предметной области, универсуму рассуждения, и принимающие любые значения на нем. Именно в этом и состоит главная роль свободных индивидных переменных. Однако в составе формул они не всегда выполняют эту роль, т. е. не всегда могут рассматриваться как знаки, обозначающие любой (произвольный) объект универсума.

В том случае, когда свободная индивидная переменная в составе формулы понимается как знак, обозначающий любой (произвольный) объект из универсума, про нее говорят, что она употреблена в этой формуле в *интерпретации всеобщности*. Например, в выражении $x + y = y + x$, представляющем собой арифметический закон перестановочности сложения, переменные x и y употреблены в интерпретации всеобщности, так как это соотношение истинно при любых значениях x и y. Чтобы указать на этот факт, мы могли бы даже использовать кванторы общности и записать данный закон в виде выражения $\forall x \forall y(x + y = y + x)$. Совершенно другую ситуацию мы имеем в том случае, когда переменные входят в состав математических уравнений. Например, в выражении $x + 5 < 8$ переменная x уже не используется в интерпретации всеобщности, так как не обозначает произвольный объект из универсума. Напротив, чтобы стать истинным предложением, возможные значения для x должны быть строго фиксированы, т. е. ограничены условием данного утверждения. В этом случае говорят, что переменная в выражении использована в *условной интерпретации.*

Рассмотрим еще один пример. Пусть дано выражение $x + 5 < y$. В составе этого выражения и переменная x, и переменная y употреблены в условной интерпретации. Выберем теперь для x некоторое значение. Пусть x обозначает, скажем, число 2. Выбор этого значения для x как раз и отмечается в правиле $\exists_{\text{и}}$ как *абсолютное ограничение* данной переменной. Но выбор значения для x сразу же накладывает ограничения на выбор возможных значений для y, что и отмечается в этом же правиле как ограничение переменной. Действительно, чтобы все выражение $2 + 5 < y$ оказалось истинным, переменная y не может теперь принять в качестве значений числа, меньшие 8. Конечно, тот факт, что в качестве значения для x было выбрано число 2, является нашим произволом. С таким же успехом мы могли бы выбрать в качестве значения для x число 263. Но этот выбор сразу же по-новому ограничивает множество возможных значений для y. Теперь оно уже не может быть меньшим числа 269. Данные примеры показывают, что в случае условной интерпретации переменных выбор значения для одной переменной *ограничивает* выбор значений для других свободных переменных, входящих в выражение.

Правило $\exists_И$ (исключение квантора существования) разрешает перейти от формулы $\exists\alpha\mathbf{A}(\alpha, \gamma_1,..., \gamma_n)$ к формуле $\mathbf{A}(\alpha/\beta, \gamma_1,..., \gamma_n)$. Посылка правила – формула $\exists\alpha\mathbf{A}(\alpha, \gamma_1,..., \gamma_n)$ – утверждает наличие в универсуме какого-то объекта, удовлетворяющего условию $\mathbf{A}(\alpha, \gamma_1,..., \gamma_n)$. Тогда правило $\exists_И$ позволяет считать таковым объект, обозначенный свободной переменной β. Мы как бы говорим: «Коль скоро какой-то неизвестный нам предмет удовлетворяет условию **A**, то пусть им будет предмет, который мы далее будем обозначать переменной β». Тем самым осуществляется выбор такого значения для β, что утверждение $\mathbf{A}(\beta, \gamma_1,..., \gamma_n)$ истинно. Переменная β в этом случае берется в условной интерпретации, и она абсолютно ограничена в том смысле, что должна теперь всегда и везде в контексте рассуждения рассматриваться как имя объекта, удовлетворяющего условию $\mathbf{A}(\beta, \gamma_1,..., \gamma_n)$. Но, как было сказано выше, выбор значения для β ограничивает возможные значения для всех остальных свободных индивидных переменных $\gamma_1,..., \gamma_n$. Именно эта информация и фиксируется в правиле $\exists_И$ указанием на то, что β – абсолютно ограниченная переменная (абс. огр.), а $\gamma_1,..., \gamma_n$ – ограниченные переменные. При этом в правиле $\exists_И$ переменные $\gamma_1,..., \gamma_n$ – это все те свободные индивидные переменные, которые входят в выражение $\exists\alpha\mathbf{A}(\alpha, \gamma_1,..., \gamma_n)$.

В качестве примера применения $\exists_И$ возьмем выражение вида $\exists x(x + 5 = 8)$. Оно утверждает наличие во множестве натуральных чисел некоторого числа, удовлетворяющего условию $x + 5 = 8$. Пусть таким числом будет значение переменной y, тогда по правилу $\exists_И$ получаем выражение $y + 5 = 8$, где y является абсолютно ограниченной переменной, ибо y обозначает теперь выбранный нами объект из универсума (в данном случае он единственен). Рассмотрим выражение $\exists x(x + 5 < y)$. Выберем в универсуме некоторый объект, удовлетворяющий условию $x + 5 < y$, о существовании которого говорит выражение $\exists x(x + 5 < y)$. Пусть выбранный объект обозначается переменной x. Тогда, применяя правило $\exists_И$, можно получить выражение $x + 5 < y$, где переменная x – абсолютно ограничена (является знаком выбранного объекта), а переменная y – ограниченная переменная.

Правило $\forall_В$ разрешает перейти от формулы вида $\mathbf{A}(\alpha/\beta, \gamma_1,..., \gamma_n)$ к формуле вида $\forall\alpha\mathbf{A}(\alpha, \gamma_1,..., \gamma_n)$. Рассмотрим этот переход подробнее.

Здесь имеются две возможности. Формула вида $\mathbf{A}(\alpha/\beta, \gamma_1,..., \gamma_n)$ может быть, во-первых, такова, что при некоторых фиксированных значениях $\gamma_1,..., \gamma_n$ она будет принимать значение «истина» на выбранной области рассуждения при любом значении переменной β. Иначе говоря, переменная β при данных фиксированных значениях $\gamma_1,..., \gamma_n$ входит в формулу в интерпретации всеобщности. В таком случае переход от $\mathbf{A}(\alpha/\beta, \gamma_1,..., \gamma_n)$ по правилу $\forall_{\mathbf{B}}$ к формуле вида $\forall\alpha\mathbf{A}(\alpha, \gamma_1,..., \gamma_n)$ является вполне законным и не вызывает никаких сомнений. Во-вторых, формула $\mathbf{A}(\beta, \gamma_1,..., \gamma_n)$ может оказаться таковой, что при каких-то фиксированных значениях $\gamma_1,..., \gamma_n$ на предметной области она будет при некоторых значениях β принимать значение «ложь». Тогда выберем одно из таких значений для переменной β. Этот выбор делает переменную β абсолютно ограниченной, а все остальные свободные переменные ограниченными. Формула $\mathbf{A}(\beta, \gamma_1,..., \gamma_n)$ является, конечно же, ложной. Но из ложного высказывания следует все, что угодно, а потому, в частности, следует и выражение вида $\forall\alpha\mathbf{A}(\alpha, \gamma_1,..., \gamma_n)$. Таким образом, и в данном случае обосновывается переход по правилу $\forall_{\mathbf{B}}$. Заметим, что в правиле $\forall_{\mathbf{B}}$ переменные $\gamma_1,..., \gamma_n$ – это все свободные переменные формулы $\forall\alpha\mathbf{A}(\alpha, \gamma_1,..., \gamma_n)$.

Обратим внимание на следующее обстоятельство: разъясняя смысл правила $\forall_{\mathbf{B}}$, мы показали, что при ложности $\mathbf{A}(\alpha/\beta, \gamma_1,..., \gamma_n)$ формула $\forall\alpha\mathbf{A}(\alpha, \gamma_1,..., \gamma_n)$ логически следует из нее, но это не значит, что при истинности $\mathbf{A}(\alpha/\beta, \gamma_1,..., \gamma_n)$ обязательно должна быть истинной и формула $\forall\alpha\mathbf{A}(\alpha, \gamma_1,..., \gamma_n)$.

Сформулируем теперь понятие вывода в исчислении предикатов.

Выводом **в рассматриваемом исчислении называется непустая конечная последовательность формул $C_1,..., C_n$, удовлетворяющая следующим условиям:**

(1) каждая C_i есть либо посылка, либо получена из предыдущих формул по одному из правил вывода;

(2) если в выводе применялись правила $\supset_{\mathbf{B}}$ или $\neg_{\mathbf{B}}$, то все формулы, начиная с последней посылки и вплоть до результата применения данного правила, исключаются из дальнейших шагов построения вывода;

(3) ни одна индивидная переменная не ограничивается абсолютно в выводе дважды;

(4) отсутствует переменная в выводе, которая ограничивает сама себя.

***Доказательство* в исчислении предикатов есть вывод из пустого множества неисключенных посылок.**

***Завершенным* выводом называется тот вывод, в котором никакая переменная, абсолютно ограничивавшаяся в выводе, не встречается свободно ни в неисключенных посылках, ни в заключении.**

***Завершенное доказательство* есть завершенный вывод из пустого множества посылок. Последняя формула этой последовательности называется *доказуемой формулой*, или *теоремой*.**

Среди этих четырех введенных понятий основным является понятие вывода. Оно, в сравнении с соответствующим понятием исчисления высказываний, обогащено еще двумя требованиями.

Первое из этих требований семантически понятно: ведь пометка об абсолютной ограниченности некоторой переменной означает, что в выводе она теперь становится знаком какого-то конкретного объекта, а потому второе ее абсолютное ограничение может указывать на то, что она стала знаком какого-то иного объекта. Такая ситуация может вести к противоречиям и должна быть запрещена.

Что касается второго дополнительного требования, то оно связано со следующими соображениями. В основе кванторных правил $\forall_{\text{И}}$ и $\exists_{\text{В}}$ лежат отношения логического следования. Для правила $\forall_{\text{И}}$ это означает, что переход от формулы $\forall\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ к $\mathbf{A}(\alpha/\mathbf{t})$ оправдан тем, что имеет место логическое следование $\forall\alpha\mathbf{A}(\alpha) \models \mathbf{A}(\alpha/\mathbf{t})$, а для правила $\exists_{\text{В}}$ переход от $\mathbf{A}(\alpha/\mathbf{t})$ к $\exists\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ оправдан наличием следования вида $\mathbf{A}(\alpha/\mathbf{t}) \models \exists\alpha\mathbf{A}(\alpha)$.

Иначе обстоит дело с правилами $\forall_{\text{В}}$ и $\exists_{\text{И}}$. В их основе не лежит отношение логического следования, т. е. в общем случае:

$$\mathbf{A}(\alpha/\beta, \gamma_1,..., \gamma_n) \not\models \forall\alpha\mathbf{A}(\alpha, \gamma_1,..., \gamma_n) \text{ и}$$

$$\exists\alpha\mathbf{A}(\alpha, \gamma_1,..., \gamma_n) \not\models \mathbf{A}(\alpha/\beta, \gamma_1,..., \gamma_n),$$

что легко может быть установлено методами, рассмотренными в предыдущей главе.

Несмотря на это, в исчислении предикатов все же принимаются данные правила, но, чтобы не допустить возможности выведения из истинных утверждений ложных заключений, следует каким-то образом «заблокировать» негативное влияние отсутствия логического следования. Это достигается двумя формальными условиями.

Первое формальное условие как раз и выражается пунктом 4 понятия вывода. Данный запрет позволяет, например, исключить возможность переходов вида: $y = y \vdash \forall x(x = y)$ и $\exists x(x < y) \vdash y < y$, т. е. переходов от истинных (выполнимых) утверждений к ложным. Действительно, при таком переходе переменная y ограничивает сама себя. Надо только учитывать, что ситуация, когда переменная ограничивает сама себя, может возникнуть не только прямым образом, как это было в приведенных примерах, но и косвенно. Здесь имеется в виду то обстоятельство, что отношение «x ограничивает y» является транзитивным, т. е. для него выполняется соотношение: «Для всяких α, β и γ верно, если α ограничивает β, а β ограничивает γ, то α ограничивает γ». Поэтому в выводе может возникнуть ситуация самоограничения, скажем, переменной x таким образом: на одном шаге вывода переменная x, будучи абсолютно ограниченной, ограничивает переменную y, а на другом шаге переменная y, будучи абсолютно ограниченной, ограничивает x. Тогда, по транзитивности, переменная x будет ограничивать сама себя.

Второе формальное условие состоит в различении понятия вывода и понятия завершенного вывода. *Только при осуществлении завершенного вывода гарантируется, что между посылками и заключением имеет место отношение логического следования.*

Прежде чем перейти к рассмотрению примеров выводов и доказательств в исчислении предикатов, отметим, что при применении кванторных правил, согласно их формулировкам, можно как менять подкванторные индивидные переменные на новые переменные, так и не менять их.

В исчислении предикатов в полном объеме сохраняют свою силу четыре эвристики выбора посылок, сформулированные выше. Правда, к ним теперь может быть присоединена еще одна эвристика.

5-я эвристика. После того как применением всех шагов по 1-й эвристике удалось дойти до формулы **B**, имеющей вид $\forall\alpha\mathbf{A}$ или $\exists\alpha\mathbf{A}$, можно далее продолжить выбор посылок из формулы **A** по эвристикам 1 или 2, не обращая внимания на кванторы.

Рассмотрим примеры вывода и доказательства. Обоснуем выводимость вида:

$\exists x\forall y\mathbf{P}(x, y) \vdash \forall y\exists x\mathbf{P}(x, y)$.

1. $\exists x\forall y\mathbf{P}(x,y)$ – пос.
2. $\forall y\mathbf{P}(x,y)$ – $\exists_{\text{и}}$, 1, x – абс. огр.
3. $\mathbf{P}(x,y)$ – $\forall_{\text{и}}$, 2
4. $\exists x\mathbf{P}(x,y)$ – $\exists_{\text{в}}$, 3
5. $\forall y\exists x\mathbf{P}(x,y)$ – $\forall_{\text{в}}$, 4, y – абс. огр.

В данном формальном рассуждении абсолютно ограничивались переменные x и y, но так как они не входят свободно ни в посылку, ни в заключение, данное рассуждение представляет собой завершенный вывод и, следовательно, метаутверждение о выводимости обосновано. Попытаемся обосновать теперь метаутверждение:

$\forall y\exists x\mathbf{P}(x, y) \vdash \exists x\forall y\mathbf{P}(x, y)$.

1. $\forall y\exists x\mathbf{P}(x,y)$ – пос.
2. $\exists x\mathbf{P}(x,y)$ – $\forall_{\text{и}}$, 1
3. $\mathbf{P}(x,y)$ – $\exists_{\text{и}}$, 2, x – абс. огр., y – огр.
4. $\forall y\mathbf{P}(x,y)$ – $\forall_{\text{в}}$, 3, y – абс. огр., x – огр.

На шаге 4 вывод должен быть «оборван», так как данная последовательность уже не удовлетворяет пункту (4) понятия вывода, согласно которому ни одна переменная не должна ограничивать сама себя. В нашем же случае на 3-м шаге x ограничивает y, а на 4-м – y ограничивает x. Поэтому по транзитивности получается, что x ограничивает x, т. е. сама себя. Обойти эту сложность не удается даже изменением переменной при применении правил $\exists_{\text{и}}$ и $\forall_{\text{в}}$. И это не случайно, так как рассматриваемая выводимость вообще не может быть обоснована.

Покажем теперь на двух примерах, как действует эвристика 5.

$\vdash (\forall x(\mathbf{S}(x) \supset \mathbf{P}(x))\ \&\ \forall x(\mathbf{P}(x) \supset \mathbf{Q}(x))) \supset \forall x(\mathbf{S}(x) \supset \mathbf{Q}(x))$.

1.	$\forall x(\mathbf{S}(x) \supset \mathbf{P}(x))\ \&\ \forall x(\mathbf{P}(x) \supset \mathbf{Q}(x))$	– пос.
2.	$\mathbf{S}(x)$	– пос.
3.	$\forall x(\mathbf{S}(x) \supset \mathbf{P}(x))$	– $\&_{И}$, 1
4.	$\forall x(\mathbf{P}(x) \supset \mathbf{Q}(x))$	– $\&_{И}$, 1
5.	$\mathbf{S}(x) \supset \mathbf{P}(x)$	– $\forall_{И}$, 3
6.	$\mathbf{P}(x)$	– $\supset_{И}$, 2, 5
7.	$\mathbf{P}(x) \supset \mathbf{Q}(x)$	– $\forall_{И}$, 4
8.	$\mathbf{Q}(x)$	– $\supset_{И}$, 6, 7
9.	$\mathbf{S}(x) \supset \mathbf{Q}(x)$	– $\supset_{В}$, 8
10.	$\forall x(\mathbf{S}(x) \supset \mathbf{Q}(x))$	– $\forall_{В}$, 9, x – абс. огр.
11.	$(\forall x(\mathbf{S}(x) \supset \mathbf{P}(x))\ \&\ \forall x(\mathbf{P}(x) \supset \mathbf{Q}(x))) \supset \forall x(\mathbf{S}(x) \supset \mathbf{Q}(x))$	– $\supset_{В}$, 10

Данный вывод является завершенным доказательством, а потому метаутверждение обосновано. В доказательстве на 2-м шаге применялась 5-я эвристика к формуле $\forall x(\mathbf{S}(x) \supset \mathbf{Q}(x))$.

Рассмотрим теперь следующий пример:

$$\vdash \neg\exists x\neg\mathbf{P}(x, \mathbf{f}(y), \mathbf{a}) \supset \forall x\mathbf{P}(x, \mathbf{f}(y), \mathbf{a}).$$

1.	$\neg\exists x\neg\mathbf{P}(x, \mathbf{f}(y), \mathbf{a})$	– пос.
2.	$\neg\mathbf{P}(x, \mathbf{f}(y), \mathbf{a})$	– пос.
3.	$\exists x\neg\mathbf{P}(x, \mathbf{f}(y), \mathbf{a})$	– $\exists_{В}$, 2
4.	$\neg\neg\mathbf{P}(x, \mathbf{f}(y), \mathbf{a})$	– $\neg_{В}$, 1, 3
5.	$\mathbf{P}(x, \mathbf{f}(y), \mathbf{a})$	– $\neg_{И}$, 4
6.	$\forall x\mathbf{P}(x, \mathbf{f}(y), \mathbf{a})$	– $\forall_{В}$, 5, x – абс. огр.; y – огр.
7.	$\neg\exists x\neg\mathbf{P}(x, \mathbf{f}(y), \mathbf{a}) \supset \forall x\mathbf{P}(x, \mathbf{f}(y), \mathbf{a})$	– $\supset_{В}$, 6

Эта последовательность – завершенное доказательство, так как единственная абсолютно ограничивавшаяся в выводе переменная x не входит свободно в заключение (неисключенных посылок здесь нет, так как их множество пусто). Применение эвристики 5 к формуле $\forall x\mathbf{P}(x, \mathbf{f}(y), \mathbf{a})$ состояло в том, что было рассмотрено выражение $\mathbf{P}(x, \mathbf{f}(y), \mathbf{a})$, стоящее после квантора $\forall$. Это выражение не имеет вида импликации, а потому к ней нельзя применить 1-ю эвристику. В силу этого применяется 2-я эвристика, которая и дает нам вторую посылку – $\neg\mathbf{P}(x, \mathbf{f}(y), \mathbf{a})$. Тем самым мы перешли, в соответствии с эвристикой 2, к построению вывода от противного, т. е. к нахождению среди формул вывода противоречащих друг другу.

Для построенного в данной главе натурального исчисления предикатов можно доказать справедливость следующего метаутверждения:

Завершенный вывод $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ имеет место тогда и только тогда, когда $A_1, \ldots, A_n \models B$,

что, с одной стороны, гарантирует корректность дедуктивных средств рассуждения, принятых в исчислении, а с другой, – говорит о том, что рассмотренное исчисление предикатов первого порядка адекватно формализует логику предикатов первого порядка.

ГЛАВА V

СИЛЛОГИСТИКА

§1. Общие сведения о силлогистике

Силлогистика является первой логической дедуктивной теорией. Построил ее основатель логики древнегреческий философ Аристотель. Непреходящее значение данной теории состоит в том, что она послужила образцом для создания других аксиоматических теорий. В частности, аксиоматическая система геометрии Евклида была создана последним в духе тех принципов построения и исследования дедуктивных систем знания, которые сформулировал Аристотель применительно к силлогистике. Кроме того, силлогистика отличается значительной простотой, элегантностью и кажущейся самоочевидностью устанавливаемых в ней логических законов, формулировка которых осуществляется почти на естественном языке без использования какой-либо сложной символики. Все это делает силлогистику наиболее простым и легко доступным средством приобщения учащихся к логическому знанию, а потому, начиная с античности и вплоть до настоящего времени, изучение силлогистики является обязательным элементом логического образования.

На русский язык греческий термин «syllogismos» переводится как «сосчитывание», «вычисление», и поэтому производный от него термин «силлогистика» можно было бы перевести русским термином «исчисление».

В силлогистике исследуются различного рода логические отношения между *категорическими атрибутивными* высказываниями. К их числу относятся высказывания следующих логических форм:

1. Всякий α есть β – *общеутвердительные*.
2. Всякий (Ни один) α не есть β – *общеотрицательные*.
3. Некоторый α есть β – *частноутвердительные*.
4. Некоторый α не есть β – *частноотрицательные*.
5. **a** есть β – *единичноутвердительные*.
6. **a** не есть β – *единичноотрицательные*.

Термин «категорический» является производным от греческого «categoria», что можно перевести на русский язык как «сказывание».

Соответственно, термин «категорический» можно было бы перевести как «без сомнений, окончательно, безапелляционно сказанный». В высказываниях отмеченного типа всегда утверждается или отрицается наличие у предметов некоторого *атрибута* (от лат. «attributum» – свойство). Поэтому данные выражения называются *атрибутивными.*

В составе высказываний этих форм выделяют *кванторные слова, предицирующие связки и термины.*

В каждом категорическом атрибутивном высказывании имеется два термина: *субъект* – термин, обозначающий те предметы, о которых в высказывании нечто утверждается или отрицается, и *предикат* – термин, обозначающий то, что предицируется, утверждается или отрицается об этих предметах, а утверждается или отрицается в силлогистике всегда некоторое свойство. В указанных логических формах высказываний местоположение субъекта показано знаками α и **a**, а местоположение предиката – знаком β. Так, в выражении «Сократ – мудрец» термин «Сократ» – это субъект, а термин «мудрец» – предикат. В выражении «Всякий человек, обучающийся в школе, изучает какую-нибудь науку» словосочетание «человек, обучающийся в школе» является субъектом, а словосочетание «изучает какую-нибудь науку» является предикатом.

По *количеству* атрибутивные категорические высказывания делятся на *единичные*, в которых признак предицируется отдельному предмету и субъектом которых является единичный термин (имя), и *множественные*, в которых признак предицируется предметам некоторого класса. Среди множественных выделяют *общие* и *частные* высказывания. К первым относятся высказывания, содержащие *квантор общности*, выражаемый словами «всякий», «любой», «каждый», «все» (для отрицательных высказываний часто используется словосочетание «ни один») и другими их синонимами. Ко вторым относятся высказывания, содержащие *квантор существования*, выражаемый словами «некоторый», «какой-либо» и др.

По *качеству* рассматриваемые высказывания делятся на *утвердительные*, указывающие на факт наличия свойства у предметов (в них присутствует утвердительная предицирующая связка «есть») и *отрицательные* (в них присутствует отрицательная предицирующая связка «не есть», которая предицирует отсутствие некоторого свойства у предметов). Иногда, в соответствии с правилами русской грамматики, связка «есть» заменяется знаком «тире», часто также вместо слова «есть» употребляется слово «является», зачастую связка вообще не выражается, а только подразумевается. Например, вместо «Человек есть разумный» говорят «Человек является разумным» или «Человек разумен».

В названиях атрибутивных высказываний указываются их количественные и качественные характеристики. Как будет далее показано, единичные высказывания можно трактовать как высказывания общего характера, а потому они не будут играть самостоятельной роли в силлогистике.

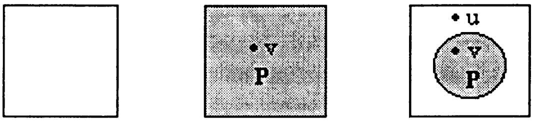
Итак, самостоятельную роль в силлогистике играют лишь высказывания первых четырех типов.

В средние века высказывания этих последних типов получили специальные обозначения: предложения с логической формой «Всякий α есть β» стали называться высказываниями типа ***a*** (первая буква латинского слова «affirmo» – утверждаю); предложения с логической формой «Некоторый α есть β» стали называться высказываниями типа ***i*** (вторая гласная в том же слове); предложения вида «Всякий α не есть β» стали относиться к высказываниям типа ***e*** (первая гласная буква в слове «nego» – отрицаю), а предложения вида «Некоторый α не есть β» – к высказываниям типа ***o*** (вторая гласная в слове «nego»).

Эти обозначения оказались очень удобным средством сокращенного (формульного) представления в языке категорических высказываний. Пользуясь ими, будем выражать логическую структуру первых четырех логических форм посредством формул:

Всякий α есть β – $\alpha\boldsymbol{a}\beta$,
Всякий α не есть β – $\alpha\boldsymbol{e}\beta$,
Некоторый α есть β – $\alpha\boldsymbol{i}\beta$,
Некоторый α не есть β – $\alpha\boldsymbol{o}\beta$.

В настоящее время в логике, кроме собственно силлогистики Аристотеля, разработано большое количество других силлогистических теорий. Ниже будет рассмотрен тот вариант, который, начиная с поздней античности и вплоть до настоящего времени, постоянно воспроизводится в учебной литературе по логике. Этот вариант называется *традиционной силлогистикой*. Ее особенностью является наложение на термины категорических атрибутивных высказываний следующих ограничивающих условий: при их интерпретации на некотором универсуме они обязательно должны оказаться знаками таких свойств (классов), которые являются *непустыми* и *неуниверсальными*. Это означает, например, для свойства, обозначенного термином **P**, что в универсуме должен найтись хотя бы один предмет *v*, который обладает этим свойством и для которого верно утверждать, что «*v* есть **P**» (класс **P** непуст), и найтись хотя бы один предмет *u* такой, что он не обладает этим свойством, т. е. для него верно будет утверждать, что «*u* не есть **P**» (класс **P** не является универсальным). Только что сказанное можно пояснить следующими схемами (см. Рис.1).



(а) **P** пусто (б) **P** универсально (в) **P** непусто и неуниверсално

Рис. 1

На схемах квадратами обозначены *универсумы* – классы предметов, о которых мы собираемся рассуждать. Затенением обозначен класс предметов, обладающих свойством **P**, а точками – сами предметы. На схеме (а) ничего не затенено, так как свойство **P** пусто и предметов, обладающих этим свойством, нет. На схеме (б) затенен весь универсум, так как каждый предмет из этого универсума обладает свойством **P** (данное свойство универсально). На схеме (в) затеняется лишь часть универсума, так как в нем имеются как предметы, обладающие свойством **P** (таковым является, например, предмет *v*), так и предметы, этим свойством не обладающие (предмет *u*). С учетом принятых в традиционной силлогистике ограничений схемы (а) и (б) далее не будут использоваться, т. е. здесь законной считается лишь схема (в).

Отметим, в частности, что в собственно *аристотелевской силлогистике* никаких ограничений на термины категорических атрибутивных высказываний не накладывается. В этом она существенно расходится с традиционной силлогистикой.

Различные силлогистические теории могут отличаться друг от друга также и синтаксическими характеристиками терминов, которые являются субъектами и предикатами атрибутивных категорических высказываний. В частности, в данной главе будут последовательно рассмотрены две силлогистические теории – *позитивная традиционная силлогистика*, а также *негативная традиционная силлогистика.*

Позитивной силлогистикой называется теория дедукции из категорических высказываний, в которой не учитывается внутренняя структура терминов. Иначе говоря, каждый термин (субъект и предикат) трактуется как элементарное, простое выражение, неразложимое на составные части. С другой стороны, если в языке теории содержится единственный терминообразующий оператор – оператор *терминного отрицания*, позволяющий по любому термину построить новый термин, являющийся отрицанием исходного, то такая система относится к негативной силлогистике. Таким образом, в негативной силлогистике различаются два типа терминов – *положительные* и *отрицательные.*

Описанные выше виды категорических атрибутивных высказываний относятся к числу простых. Но, применяя к ним логические операции, выражаемые пропозициональными связками, можно из простых высказываний строить сложные. Например, можно отрицать то или иное высказывание, строить из них конъюнктивные высказывания и т. д. Для более четкого понимания сказанного введем *алфавит силлогистики* и понятие *силлогистической формулы* в позитивной силлогистике.

В алфавит позитивной силлогистики входят следующие символы: $\mathbf{S}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{S_1}$, $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{M_1}$, $\mathbf{S_2}$,... – термины; &, $\vee$, $\supset$, $\neg$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{o}$ – логические термины (логические постоянные); а также скобки в качестве технических символов.

Понятие силлогистической формулы позитивной силлогистики:

1. **Если α и β – термины, то $\alpha a\beta$, $\alpha i\beta$, $\alpha e\beta$, $\alpha o\beta$ – силлогистические формулы.**
2. **Если A – силлогистическая формула, то $\neg$A – силлогистическая формула.**
3. **Если A и B – силлогистические формулы, то (A & B), (A $\vee$ B), (A $\supset$ B) – силлогистические формулы.**
4. **Ничто иное не есть силлогистическая формула.**

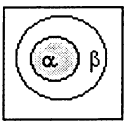
Условимся рассматривать далее формулы, задаваемые пунктом 1 данного определения, как сокращения соответствующих логических форм введенных выше категорических атрибутивных высказываний.

§2. Семантика традиционной силлогистики

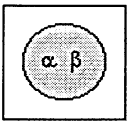
В традиционной силлогистике не могут встречаться пустые термины, т. е. термины типа «русалка», «человек, достигший центра Земли», «вечный двигатель» и т. д., а также универсальные термины. Например, если в качестве универсума берется класс людей, то в силлогистике нельзя использовать термин «разумное существо», ибо класс разумных существ совпадает с классом людей (является универсальным). Поэтому, чтобы последними терминами мы могли пользоваться и могли рассматривать предложения вида «Каждый человек является разумным существом», необходимо взять более широкий универсум, чем класс людей.

Допустим теперь, что, исходя из тех или иных соображений, выделен и определен некоторый универсум рассуждения **U**. В таком случае истинность категорических атрибутивных высказываний можно определить в традиционной силлогистике через выполнимость для субъектов и предикатов отношений, задаваемых некоторыми *модельными схемами*.

(1) ***Предложение*** «Всякий α есть β» ***истинно*** **тогда и только тогда, когда классы** α **и** β **находятся в одном из следующих отношений:**



или

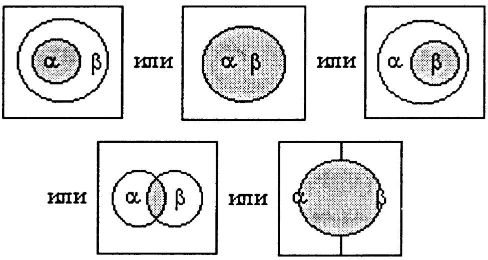


Например, субъект и предикат высказывания «Всякий студент является учащимся» находятся в отношении, задаваемом первой модельной схемой, а потому оно является истинным. Точно также является истинным и предложение «Всякий квадрат – это равносторонний прямоугольник», так как субъект и предикат этого высказывания находятся в отношении, задаваемом второй модельной схемой.

(2) ***Предложение*** «Всякий α не есть β» ***истинно*** **тогда и только тогда, когда классы α и β находятся в одном из следующих отношений:**

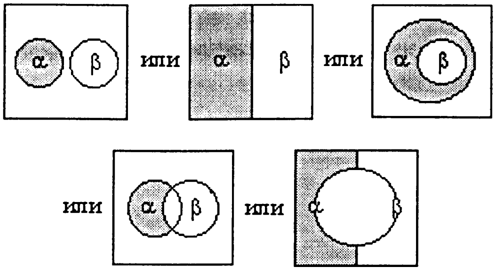
Примером истинного предложения, в котором субъект и предикат находятся в отношении, задаваемом первой модельной схемой, может служить предложение «Ни одно натуральное число не является иррациональным». Вторая модельная схема имеет место для субъекта и предиката предложения «Всякий юридически ненаказуемый поступок не есть преступление», а потому оно также должно рассматриваться как истинное.

(3) ***Предложение*** «Некоторый α есть β» ***истинно*** **тогда и только тогда, когда классы α и β находятся в одном из следующих отношений:**



Примерами высказываний, субъекты и предикаты которых соответственно удовлетворяют каждой из данных модельных схем, будут: «Некоторый студент является учащимся», «Некоторый квадрат есть равносторонний прямоугольник», «Некоторый писатель является поэтом», «Некоторый учащийся – спортсмен», «Некоторое натуральное число, меньшее 100, является натуральным числом, большим 80».

(4) ***Предложение*** «Некоторый α не есть β» ***истинно*** **тогда и только тогда, когда классы α и β находятся в одном из следующих отношений:**

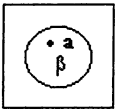


Примерами соответствующих высказываний для каждой модельной схемы будут высказывания: для первой схемы – «Некоторое натуральное число не является иррациональным», для второй – «Некоторый юридически ненаказуемый поступок не есть преступление», для третьей – «Некоторый писатель не является поэтом», для четвертой – «Некоторый учащийся не является спортсменом», для пятой – «Некоторое натуральное число, меньшее 100, не является натуральным числом, большим 80».

К определениям истинности частных высказываний нужно сделать одно важное пояснение. В разговорной практике кванторное слово «некоторые» употребляется в двух различных смыслах: (а) «только некоторые» и (б) «по крайней мере некоторые». Употребляя, например, в выражении «Некоторые писатели – люди» это слово в первом смысле, мы вынуждены трактовать данное высказывание как ложное. Ведь в этом случае утверждается «Только некоторые писатели – люди», т. е. предполагается существование таких писателей, которые людьми не являются. А так как таковых нет, ибо все писатели – люди, то наше утверждение ложно. Таким образом, первый смысл употребления слова «некоторые» исключает те отношения между субъектом α и предикатом β, когда класс предметов, обладающих свойством α, полностью включается в класс (или полностью исключается из класса) предметов, обладающих свойством β.

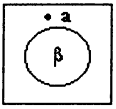
Однако в силлогистике принято употреблять слово «некоторые» не в первом, а во втором смысле – «по крайней мере некоторые», что означает: «утверждаемое или отрицаемое верно по крайней мере для одного предмета из класса α, а может быть, и для всех». Именно этим обстоятельством обусловлено то, что две модельные схемы, на которых считаются истинными высказывания типа *a*, сохраняются в качестве модельных схем и для высказываний типа *i*, а те модельные схемы, на которых истинны высказывания типа *e*, переносятся в качестве модельных схем истинности и для высказываний типа *o*.

(5) ***Предложение*** «а есть β» ***истинно*** **тогда и только тогда, когда между предметом, обозначенным термином «а», и классом β существует следующее отношение:**



т. е. предмет **а** является элементом класса β. Примерами таких истинных высказываний будут «Д. И. Менделеев – химик», «2 – четное число», «Лондон – город» и т. д.

(6) ***Предложение*** «а не есть β» ***истинно*** **тогда и только тогда, когда между предметом, обозначенным термином «а», и классом β существует следующее отношение:**



т. е. предмет **а** не является элементом класса β. Примерами таких высказываний будут «5 не является четным числом», «Наполеон не является англичанином» и др.

В модельных схемах, участвовавших в определениях (1)–(4), некоторые классы помечались затенением. Этим приемом изображались *объемы сказывания*, т. е. множества тех предметов из класса α, для которых предицируемое в соответствующих предложениях наличие или отсутствие свойства β оказывается выполненным. Пользуясь затенением, введем теперь одно очень важное семантическое понятие – понятие *распределенности терминов.*

Термин, входящий в состав категорического атрибутивного высказывания, *распределен* в нем, если и только если в каждой модельной схеме, которая является условием истинности высказываний этого типа, класс предметов, обозначенный данным термином, полностью затенен или полностью не затенен. В противном случае будем говорить, что термин *не распределен.*

Рассматривая теперь модельные схемы для высказываний типа ***a***, ***e***, ***i*** и ***o*** и помечая распределенные термины знаком «+», а нераспределенные знаком «–», можно суммировать сказанное следующим списком:

Всякий α^{+} есть β^{-},
Всякий α^{+} не есть β^{+},
Некоторый α^{-} есть β^{-},
Некоторый α^{-} не есть β^{+}.

Легко видеть, что *субъекты всегда распределены в общих и нераспределены в частных высказываниях*, в то время как *предикаты всегда распределены в отрицательных и нераспределены в утвердительных высказываниях*.

Что касается единичных высказываний, то в них субъект единичен. На графической схеме он изображен точкой. Однако в традиционной силлогистике все термины трактуются единообразно – как знаки некоторых классов предметов. Поэтому единичные термины должны рассматриваться как обозначающие единичные классы, т. е. классы, содержащие ровно один объект. Если теперь эти единичные классы на соответствующих модельных схемах затенить, то вопрос о распределенности терминов для единичных высказываний должен решаться, в полном согласии с вышеуказанным критерием, следующим образом:

$\mathbf{a}^{+}$ есть β^{-},
$\mathbf{a}^{+}$ не есть β^{+}.

Как видим, термины в единичных высказываниях распределены точно так же, как они распределены в соответствующих общих высказываниях. Это позволяет считать, что в традиционной силлогистике высказывания единичноутвердительные – это аналоги общеутвердительных, а единичноотрицательные – аналоги общеотрицательных. Тем самым единичные утверждения не будут далее играть самостоятельной роли. Они всегда будут трактоваться как высказывания общие.

Введем в силлогистику понятие *логического следования*. Пусть $\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \ldots, \mathbf{A_n}$ и **B** будут силлогистическими формулами. Тогда:

Из посылок $\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \ldots, \mathbf{A_n}$ *логически следует заключение* B ($\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \ldots, \mathbf{A_n} \vDash \mathbf{B}$), если и только если каждая модельная

схема, на которой одновременно истинны все посылки $A_1, A_2, \ldots, A_n$, делает истинной также и В.

Будем называть В *общезначимой формулой силлогистики* (*законом силлогистики*) и писать $\models$ В, если и только если В является истинной на любой модельной схеме.

§3. Законы силлогистики и непосредственные следования

Рассмотрим высказывания типа ***a***, ***e***, ***i*** и ***o***, в которые входит ровно один термин, т. е. на местах субъектов и предикатов стоит один и тот же термин, например S. Учитывая определения условий истинности для данных высказываний (пункты (1)–(4)), можно построить следующую таблицу (см. Табл.1).

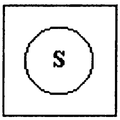
модельные схемы	S*a*S	S*e*S	S*i*S	S*o*S
	*и*	*л*	*и*	*л*

Таблица 1

Из таблицы видно, что выражения вида S*a*S и S*i*S истинны на любой модельной схеме (при одной переменной число всех возможных различных модельных схем равно в точности одной модельной схеме, которая и нарисована в таблице), а потому логическими законами будут следующие утверждения:

(1) $\models$ Всякий S есть S – *закон силлогистического тождества для высказываний типа **a**.*

(2) $\models$ Некоторый S есть S – *закон силлогистического тождества для высказываний типа **i**.*

Таким образом, логически истинными высказываниями будут, например, высказывания: «Всякий человек есть человек», «Некоторый атом есть атом» и т. д.

Наличие законов силлогистического тождества для высказываний типа ***a*** и ***i*** является характерной особенностью традиционной силлогистики. Именно посредством этих законов синтаксическим способом выражается условие о непустоте терминов, входящих в категорические высказывания.

Если учесть, что «¬» – это операция отрицания, то из Таблицы 1 видно, что общезначимыми должны быть и выражения вида:

(3) ⊨ ¬Всякий **S** не есть **S**,

(4) ⊨ ¬Некоторый **S** не есть **S**.

Перейдем к рассмотрению нетривиальных однопосылочных умозаключений из высказываний типа ***a***, ***e***, ***i*** и ***o***, содержащих ровно два различных термина. В традиционной силлогистике для двух терминов существует в точности семь различных модельных схем. Представим тогда *силлогистической таблицей истинности* условия истинности некоторых формул (см. Табл. 2).

Данная таблица содержит две подтаблицы (1 и 2), которые могут быть использованы для проверки двух типов *непосредственных умозаключений*, т. е. умозаключений из одной посылки: подтаблица 1 – для проверки так называемых *умозаключений по логическому квадрату*, а подтаблица 2 – для проверки *обращения*.

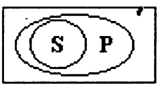
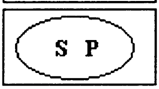
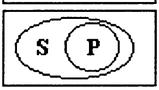
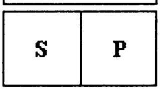
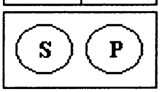
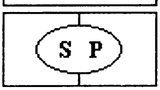
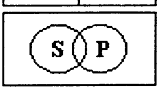
модельные схемы	S*a*P	S*e*P	S*i*P	S*o*P	P*a*S	P*e*S	P*i*S	P*o*S
	1	2	3	4	5	6	7	8
	и	л	и	л	л	л	и	и
	и	л	и	л	и	л	и	л
	л	л	и	и	и	л	и	л
	л	и	л	и	л	и	л	и
	л	и	л	и	л	и	л	и
	л	л	и	и	л	л	и	и
	л	л	и	и	л	л	и	и
	подтаблица 1				подтаблица 2			

Таблица 2

Логический квадрат служит мнемоническим целям, способствуя запоминанию различных логических отношений, которые существуют между высказываниями типа ***a***, ***e***, ***i*** и ***o*** с одинаковым расположением терминов, т. е. с одинаковыми субъектами и одинаковыми предикатами. Квадрат имеет следующий вид (см. Рис. 2).

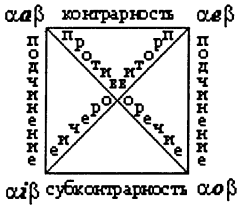


Рис. 2

К непосредственным *умозаключениям по логическому квадрату* относятся умозаключения, которые строятся на основе знания отношений между высказываниями вида α***a***β, α***e***β, α***i***β и α***o***β.

Эти отношения зафиксированы в подтаблице 1. Так, на Рис. 2 показано, что между ***a*** и ***i***, с одной стороны, ***e*** и ***o*** – с другой, имеет место отношение подчинения. Действительно, из подтаблицы 1 непосредственно усматривается, что отношение подчинения существует между высказывательными формами «Всякий **S** есть **P**» и «Некоторый **S** есть **P**» (столбцы 1 и 3), а также между «Всякий **S** не есть **P**» и «Некоторый **S** не есть **P**» (столбцы 2 и 4), что можно представить в форме:

(5) Всякий **S** есть **P** ⊨ Некоторый **S** есть **P**,

(6) Всякий **S** не есть **P** ⊨ Некоторый **S** не есть **P**.

Это позволяет обосновать умозаключения следующих видов:

$$\frac{\text{Всякий } \mathbf{S} \text{ есть } \mathbf{P}}{\text{Некоторый } \mathbf{S} \text{ есть } \mathbf{P}} \quad \text{и} \quad \frac{\text{Всякий } \mathbf{S} \text{ не есть } \mathbf{P}}{\text{Некоторый } \mathbf{S} \text{ не есть } \mathbf{P}},$$

а по контрапозиции – и умозаключения вида:

$$\frac{\neg\text{Некоторый } \mathbf{S} \text{ есть } \mathbf{P}}{\neg\text{Всякий } \mathbf{S} \text{ есть } \mathbf{P}} \quad \text{и} \quad \frac{\neg\text{Некоторый } \mathbf{S} \text{ не есть } \mathbf{P}}{\neg\text{Всякий } \mathbf{S} \text{ не есть } \mathbf{P}}.$$

Учитывая тот факт, что по контрапозиции всегда можно перейти от умозаключения вида **A** ⊢ **B** к умозаключению вида ¬**B** ⊢ ¬A, далее умозаключения, которые можно получить по контрапозиции, мы указывать не будем.

Таким образом, любое конкретное высказывание типа ***i*** выводится из высказывания типа ***a*** (высказывание типа ***o*** выводится из высказывания типа ***e***). Например, из высказывания «Все учащиеся успешно сдали экзамены» выводится высказывание «Некоторые учащиеся успешно сдали экзамены», а из предложения «Каждый ученый не умеет читать» выводится предложение «Некоторые ученые не умеют читать».

Согласно логическому квадрату, между высказываниями ***a*** и ***e*** имеет место отношение *контрарности* (*противоположности*), т. е. они не могут быть одновременно истинными, хотя и могут быть одновременно ложными. Это прямо видно из рассмотрения столбцов 1 и 2 Таблицы 2. Но тогда конъюнкция вида «Всякий **S** есть **P** & Всякий **S** не есть **P**» является ложным утверждением на каждой модельной схеме, и тем самым ее отрицание будет всегда истинным. Отсюда следует, что имеет место логический закон:

(7) ⊨ ¬(Всякий **S** есть **P** & Всякий **S** не есть **P**) – *закон контрарного противоречия*,

что позволяет сразу же обосновать и принять умозаключение вида:

$$\frac{\text{Всякий } \mathbf{S} \text{ есть } \mathbf{P}}{\neg\text{Всякий } \mathbf{S} \text{ не есть } \mathbf{P}.}$$

Между ***i*** и ***o*** существует отношение *субконтрарности* (*подпротивоположности*), т. е. эти высказывания не могут быть одновременно ложными, хотя и могут быть одновременно истинными. Столбцы 3 и 4 подтаблицы 1 показывают, что это действительно так. Отсюда сразу получаем, что дизъюнкция этих двух высказываний на каждой из семи модельных схем принимает значение «истина», т. е. имеет место логический закон:

(8) ⊨ (Некоторый **S** есть **P** ∨ Некоторый **S** не есть **P**) – *закон субконтрарного исключенного третьего.*

Данный закон позволяет обосновать непосредственное умозаключение по логическому квадрату вида:

$$\frac{\neg\text{Некоторый } \mathbf{S} \text{ есть } \mathbf{P}}{\text{Некоторый } \mathbf{S} \text{ не есть } \mathbf{P}.}$$

На диагоналях квадрата расположены высказывания, находящиеся в отношении *контрадикторности* (*противоречия*). Они не могут быть одновременно истинными и одновременно ложными (см. столбцы 1 и 4 (2 и 3)). Таким образом, имеем:

(9) ⊨ ¬(Всякий **S** есть **P** & Некоторый **S** не есть **P**) – *закон противоречия для* ***a*** и ***o***.

(10) ⊨ ¬(Всякий **S** не есть **P** & Некоторый **S** есть **P**) – *закон противоречия для* ***e*** и ***i***.

(11) ⊨ (Всякий **S** есть **P** ∨ Некоторый **S** не есть **P**) – *закон исключенного третьего для* ***a*** и ***o***.

(12) ⊨ (Всякий **S** не есть **P** ∨ Некоторый **S** есть **P**) – *закон исключенного третьего для* ***e*** и ***i***.

Это обосновывает умозаключения следующих видов:

$$\frac{\text{Всякий } \mathbf{S} \text{ есть } \mathbf{P}}{\neg\text{Некоторый } \mathbf{S} \text{ не есть } \mathbf{P}} \quad \text{и} \quad \frac{\neg\text{Всякий } \mathbf{S} \text{ есть } \mathbf{P}}{\text{Некоторый } \mathbf{S} \text{ не есть } \mathbf{P},}$$

$$\frac{\text{Всякий } \mathbf{S} \text{ не есть } \mathbf{P}}{\neg\text{Некоторый } \mathbf{S} \text{ есть } \mathbf{P}} \quad \text{и} \quad \frac{\neg\text{Всякий } \mathbf{S} \text{ не есть } \mathbf{P}}{\text{Некоторый } \mathbf{S} \text{ есть } \mathbf{P}.}$$

Данные умозаключения по логическому квадрату называются *диагональными соотношениями*. Они говорят о том, что выражения, стоящие над чертой и под чертой, являются эквивалентными, т. е. несут одну и ту же информацию. Например, сказать: «Неверно, что все птицы улетают зимой на юг» – то же самое, что сказать: «Некоторые птицы не улетают зимой на юг», а сказать: «Неверно, что некоторые писатели не люди» – то же самое, что сказать: «Все писатели – люди». Здесь одна и та же информация выражается предложениями различной формы.

Перейдем теперь к рассмотрению подтаблицы 2, которая позволяет проверить правильность умозаключений другого типа, называемых операцией *обращения*.

Под *обращением* (*conversio*) понимается непосредственное умозаключение, в котором субъект заключения совпадает

с предикатом посылки, а предикат заключения – с субъектом посылки.

Различают два вида обращения: *чистое обращение* (conversio simplex) – когда количественная характеристика высказывания не изменяется, и *обращение с ограничением* (conversio per accidens) – когда количественная характеристика изменяется. Для высказывания ***e*** и ***i*** (см. столбцы 2 и 6 (3 и 7)) правильным является чистое обращение вида:

$$\frac{\text{Всякий } \mathbf{S} \text{ не есть } \mathbf{P}}{\text{Всякий } \mathbf{P} \text{ не есть } \mathbf{S}} \quad \text{и} \quad \frac{\text{Некоторый } \mathbf{S} \text{ есть } \mathbf{P}}{\text{Некоторый } \mathbf{P} \text{ есть } \mathbf{S}.}$$

Например, высказывание «Ни одно четное число не является иррациональным» логически эквивалентно высказыванию «Ни одно иррациональное число не является четным», а высказывание «Некоторые высокомерные люди – красавцы» логически эквивалентно высказыванию «Некоторые красавцы – высокомерные люди».

Для высказывания типа ***a*** правильным является только обращение с ограничением (см. столбцы 1 и 7):

$$\frac{\text{Всякий } \mathbf{S} \text{ есть } \mathbf{P}}{\text{Некоторый } \mathbf{P} \text{ есть } \mathbf{S},}$$

а переход от высказывания типа «Всякий **S** есть **P**» к высказыванию «Всякий **P** есть **S**» является неправильным. Например, от предложения «Все киты – млекопитающие» можно умозаключить только к предложению «Некоторые млекопитающие – киты», но никак не к предложению «Все млекопитающие – киты».

Обращение с ограничением имеет место также и для высказываний типа ***e*** (см. столбцы 2 и 8):

$$\frac{\text{Всякий } \mathbf{S} \text{ не есть } \mathbf{P}}{\text{Некоторый } \mathbf{P} \text{ не есть } \mathbf{S}.}$$

Высказывания типа ***o*** вообще не обращаются, так как любые их обращения неправильны, что легко устанавливается по Таблице 2.

§4. Простой категорический силлогизм

Рассмотрим двухпосылочные умозаключения вида: $A_1, A_2 \vdash B$.

Умозаключение, в котором от наличия некоторых отношений между терминами α и β и терминами γ и β, фиксируемых в посылках A_1 и A_2, приходят к заключению о наличии определенного отношения между терминами α и γ, называется *простым категорическим силлогизмом*.

Общий термин β, содержащийся в посылках A_1 и A_2, связывает посылки и опосредует следование из них заключения **B**. Поэтому умозаключения такого вида часто называются *опосредованными*.

Примером силлогизма является умозаключение:

Слово "бег" обозначает действие.
Слово "бег" – существительное.
―――――――――――――――――
Некоторые существительные обозначают действия.

В нем содержатся три высказывания: первые два являются посылками, а последнее – заключением. Общим термином служит словосочетание «слово "бег"», связывающее термины посылок – «существительное» и «обозначает действие».

Будем называть *меньшим* термином тот термин, который является субъектом заключения, а *бóльшим* тот, который является предикатом заключения. Они называются также *крайними* терминами. Термин же, являющийся общим для обеих посылок, будем называть *средним* термином.

Будем далее называть посылку, содержащую меньший термин, *меньшей посылкой*, а посылку, содержащую бóльший термин, – *бóльшей посылкой*.

Условимся также всегда помещать бóльшую посылку на первое место, а под ней записывать меньшую посылку. Приняв эти условия, можно все простые категорические силлогизмы разделить по так называемым *фигурам*.

Фигура **– это множество простых категорических силлогизмов, имеющих одну и ту же структуру, определяемую расположением среднего термина в посылках** (см. Рис. 3).

1. M — P	1. P — M	1. M — P	1. P — M
2. S — M	2. S — M	2. M — S	2. M — S
3. S — P	3. S — P	3. S — P	3. S — P
Фигура I	**Фигура II**	**Фигура III**	**Фигура IV**

Рис. 3

Здесь цифрой 1 обозначается бóльшая посылка, цифрой 2 – меньшая посылка, а цифрой 3 – заключение. Буква **S** обозначает меньший термин, буква **P** – больший, а буква **M** – средний термин. Очевидно, что средний термин можно расположить только указанными четырьмя способами, а потому существуют только четыре различные фигуры.

Если в фигуре указать тип высказываний, стоящих на местах посылок и заключения, то получим разновидность силлогизма по данной фигуре. Так, если взять **I** фигуру и положить, что бóльшая посылка, меньшая посылка и заключение – это высказывания типа ***a***, то получим разновидность силлогизма по **I** фигуре:

1. Всякий **M** есть **P**
2. Всякий **S** есть **M**

―――――――――――

3. Всякий **S** есть **P**.

Такого рода разновидности силлогизмов называются *модусами фигур*. В каждой фигуре имеется 64 модуса (разновидностей фигур), а по всем четырем фигурам – 256. Однако не во всех из них заключение логически следует из посылок.

Модусы **фигур, для которых между посылками и заключением существует отношение логического следования, называются** ***правильными*****.**

Всего существует 24 правильных модуса. Все они в средневековье получили специальные названия. Так, приведенный выше модус **I** фигуры называется *Barbara* (иногда пишут ***aaa***, указывая последовательно слева направо тип высказывания большей, меньшей посылок и заключения).

I фигура	II фигура	III фигура	IV фигура
Barbara (**aaa**)	*Baroko* (**aoo**)	*Bokardo* (**oao**)	*Camenos* (**aeo**)
Celarent (**eae**)	*Cesare* (**eae**)	*Disamis* (**iai**)	*Dimaris* (**iai**)
Darii (**aii**)	*Camestres* (**aee**)	*Datisi* (**aii**)	*Camenes* (**aee**)
Ferio (**eio**)	*Festino* (**eio**)	*Ferison* (**eio**)	*Fresison* (**eid**)
Barbari (**aii**)	*Camestrop* (**aeo**)	*Darapti* (**aai**)	*Bramantip* (**aai**)
Celaront (**eao**)	*Cesaro* (**eao**)	*Felapton* (**eao**)	*Fesapo* (**eao**)

Таблица 3

Для проверки правильности конкретных рассуждений, строящихся в форме простого категорического силлогизма, вовсе нет необходимости запоминать правильные модусы, знать их названия. Для этого можно воспользоваться семантическими условиями истинности категорических высказываний, задаваемых пунктами (1)–(4) §2. Проверим, например, правильность рассуждения:

1. Ни одно ластоногое животное не есть рыба.
2. Все тюлени – ластоногие животные.

---

3. Ни один тюлень не является рыбой.

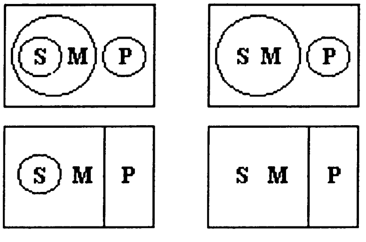
Это рассуждение осуществляется по модусу *Celarent* **I** фигуры, имеющему вид:

1. Ни один **M** не есть **P**
2. Всякий **S** есть **M**

---

3. Ни один **S** не есть **P**.

Чтобы проверить его правильность, достаточно рассмотреть лишь такие модельные схемы, на которых посылки одновременно принимают значение «истина». Множество таких схем по трем переменным **S**, **P** и **M** состоит в точности из следующих четырех модельных схем:



На каждой из этих схем термины **M** и **P**, а также **S** и **M** находятся в таких отношениях друг к другу, что посылки «Ни один **M** не есть **P**» и «Всякий **S** есть **M**» оказываются одновременно истинными. Проверяя теперь, в каком отношении на этих схемах находятся термины **S** и **P**, обнаруживаем, что в каждой из них будет справедливо утверждать «Ни один **S** не есть **P**», что и обосновывает наличие указанного следования.

Обоснование модуса *Celarent* означает, что умозаключение данной формы правильно для любых непустых и неуниверсальных терминов **S**, **P** и **M**. Так, взяв в качестве **S** термин «правильный модус по **I** фигуре», в качестве **P** – «физический закон» и в качестве **M** – «силлогизм», можем утверждать, что так как предложения «Ни один силлогизм не является физическим законом» и «Любой правильный модус по **I** фигуре – это силлогизм» истинны, то по модусу *Celarent* обязательно должно быть истинным (должно логически следовать) и предложение «Любой правильный модус по **I** фигуре не есть физический закон».

Модельные схемы позволяют не только устанавливать, но и опровергать наличие логического следования. Для этого необходимо сначала выявить логическую форму рассуждения, а затем указать хотя бы одну модельную схему, на которой посылки будут истинными, а заключение – ложным. Пусть проверяется рассуждение:

1. Некоторые вещества, ускоряющие химические реакции, не участвуют в реакции.
2. Все катализаторы являются веществами, ускоряющими химические реакции.

---

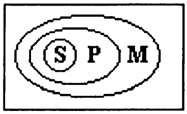
3. Все катализаторы не участвуют в реакции.

Положив, что **S** – это «катализаторы», **M** – «вещества, ускоряющие химические реакции» и **P** – «вещества, участвующие в химических реакциях», находим, что рассуждение имеет форму модуса ***oae*** **I** фигуры, т. е.:

1. Некоторый **M** не есть **P** (*o*)
2. Всякий **S** есть **M** (*a*)

---

3. Ни один **S** не есть **P** (*e*).



Приведенная сразу же под рассматриваемым силлогизмом модельная схема, как говорят в логике, «проваливает» данный модус, так как на этой схеме обе посылки силлогизма будут истинными, а заключение – ложным. На основе этой схемы можно построить и другие контрпримеры данному рассуждению. Для этого необходимо так подобрать термины **S**, **P** и **M**, чтобы посылки оказались истинными, а заключение – заведомо ложным. В нашем случае в качестве таких терминов можно взять, например, «треугольник» (**M**), «равносторонний треугольник» (**P**) и «равноугольный треугольник» (**S**). Осуществляя теперь подстановку этих терминов в рассматриваемый модус ***oae*** **I** фигуры, получим умозаключение с истинными посылками:

1. Некоторый треугольник не является равносторонним,
2. Всякий равноугольный треугольник – треугольник,

и ложным заключением:

3. Всякий равноугольный треугольник не есть равносторонний треугольник.

Данное рассуждение наглядно показывает, что умозаключение рассматриваемого вида не удовлетворяет отношению логического следования.

Семантический метод решения вопроса о правильности модусов сталкивается с той трудностью, что число возможных модельных схем отношений между терминами быстро растет с увеличением числа терминов. Если в логике высказываний число строк в таблице истинности определялось по формуле 2^n, где n – число различных пропозициональных переменных, то в силлогистике число модельных схем определяется по чрезвычайно сложной формуле, которую мы приводить не будем. Однако число это возрастает чрезвычайно быстро (так, для случая трех терминов число различных модельных схем равно 193) и делает необходимым нахождение более простых и не столь громоздких способов проверки правильности модусов простого категорического силлогизма.

Такой способ имеется. Он носит синтаксический характер и содержит перечень правил. Выполнение каждого правила является необходимым, а всех вместе – достаточным условием, чтобы считать некоторый модус правильным. Эти правила называются *общими правилами силлогизма* и подразделяются на *правила терминов* и *правила посылок.*

Модус простого категорического силлогизма является *правильным*, если и только если он удовлетворяет следующим требованиям.

Для терминов:

(1) Средний термин должен быть распределен хотя бы в одной из посылок.

(2) Если крайний термин не распределен в посылке, то он должен быть не распределен и в заключении.

Для посылок:

(3) По крайней мере одна из посылок должна быть утвердительной.

(4) Если утвердительными являются обе посылки, то и заключение должно быть утвердительным.

(5) Если имеется отрицательная посылка, то заключение должно быть отрицательным.

Эти правила позволяют быстро и эффективно решать вопрос о *правильности* или *неправильности* модусов. Так, приводившийся пример модуса ***oae*** **I** фигуры нарушает условие (1) для терминов, а потому не является правильным.

Иногда для отдельных фигур указывают специальные их свойства, которые выполняются для всех правильных модусов этих фигур. Однако они не являются критериями правильности, так как выполняются и для некоторых неправильных модусов. Эти свойства таковы: в любом правильном модусе по **I** фигуре бóльшая посылка – общее высказывание, а меньшая – утвердительная; в любом правильном модусе по **II** фигуре бóльшая посылка – общее высказывание, одна из посылок – отрицательная; в любом правильном модусе по **III** фигуре меньшая посылка – утвердительное высказывание, а заключение – частное; для **IV** фигуры такие простые свойства сформулировать не удается. Еще раз подчеркнем, что эти свойства не являются критериями правильности, так как существует большое количество неправильных модусов, которые обладают указанными свойствами.

Сказанное только что о критерии правильности простого категорического силлогизма может быть использовано лишь в том случае, если мы имеем дело именно с силлогизмом, а не с некоторым рассуждением, которое только внешне похоже на категорический силлогизм. Одной из распространенных ошибок является построение рассуждения по форме, напоминающей категорический силлогизм, но содержащей не три термина, как это должно быть в правильном силлогизме, – меньший, средний и больший, – а четыре термина. Такая ошибка называется *учетверением терминов*. Рассмотрим конкретный пример:

1. Все произведения Льва Толстого нельзя прочитать за один день.
2. «Филиппок» – произведение Льва Толстого.

---

3. «Филиппок» нельзя прочитать за один день.

На первый взгляд перед нами рассуждение по модусу *Barbara* первой фигуры. Все посылки – истинные утверждения, так как Лев Толстой действительно написал рассказ «Филиппок», а все его произведения еще никому не удалось прочитать за один день. Тем не менее, заключение ложно. Это произошло в силу учетверения терминов. Дело заключается в том, что наличествующий в рассуждении термин «произведения Льва Толстого», который, якобы, играет роль среднего термина, на самом деле таковым не является. В первой посылке субъектом высказывания является не термин «произведения Льва Толстого», а термин «все произведения Льва Толстого». Здесь слово «все» не является квантором, а является составной частью субъекта.

Вообще, слово «все» употребляется в естественном языке в двух смыслах – в *собирательном*, когда имеется в виду «все вместе», и в *разделительном*, когда имеется в виду «каждый в отдельности». В логике кванторные слова всегда употребляются во втором – разделительном смысле. В высказывание же «Все произведения Льва Толстого нельзя прочитать за один день» слово «все» явно употребляется в собирательном смысле – «Все вместе произведения Льва Толстого нельзя прочитать за один день». Именно в этом смысле данная посылка и является истинной. Если же мы будем трактовать слово «все» в первой посылке в разделительном смысле – «Каждое в отдельности произведение Льва Толстого нельзя прочитать за один день», то становится очевидной ее ложность. Но в таком случае понятно, почему заключение оказалось ложным. Как говорилось ранее, если рассуждение правильно, а одна из посылок ложна, то заключение может тоже оказаться ложным.

§5. Энтимемы

Значение силлогистики состоит прежде всего в том, что исследуемые здесь формы рассуждений широко используются в повседневной практике, являются важным элементом построения аргументации в ходе различного рода дискуссий. Однако при практическом осуществлении некоторого аргументационного процесса, в ходе полемики обычно не пользуются развернутой (полной) формой силлогизма, когда точно указываются все аргументы в пользу какого-либо утверждения и затем скрупулезно демонстрируется, что данное утверждение является логическим следствием принятых аргументов. На самом деле в аргументации обычно используют так называемые энтимемы.

Энтимемой **называется сокращенная форма рассуждения с пропуском некоторых посылок или заключения.**

Иногда такие пропуски делаются намеренно, ибо недобросовестному спорщику не всегда бывает выгодно раскрывать подлинные свои цели и намерения, т. е. раскрывать подлинные теоретические основания аргументации.

Энтимемы делятся на *корректные* и *некорректные*.

***Энтимема считается корректной*, если: (1) она может быть восстановлена до правильного модуса категорического силлогизма, (2) все посылки в восстановленном правильном модусе оказываются истинными утверждениями.**

Последнее требование вытекает из теории аргументации, которая является одной из важнейших составных частей логической прагматики. Согласно этой теории, аргументация считается корректной только при истинности аргументов.

Проверка энтимемы на ее корректность осуществляется с помощью некоторой процедуры, суть которой продемонстрируем на примере следующего рассуждения. Допустим, что некто аргументирует таким образом. «Медь – металл, – говорит он, – так как медь – проводник». Спрашивается: можно ли принять эту аргументацию, или она является неверной?

Прежде всего, надо установить, что пропущено в рассуждении: пропущено ли заключение или посылка (и какая именно). Для этого в энтимеме надо найти формальные показатели наличия следования. Таковыми показателями являются такие слова и словосочетания, как, например, «отсюда следует», «поэтому», «потому что», «ибо», «так как», «следовательно» и др. Рассматривая с этой точки зрения нашу энтимему, устанавливаем, что некто пытается обосновать положение (тезис) «Медь – металл» ссылкой на то, что «Медь – проводник». Это сразу же указывает на то, что высказывание «Медь – металл» – заключение, где «медь» – меньший, а «металл» – больший термины. Но тогда предложение «Медь – проводник» – это меньшая посылка, где «проводник» – средний термин. Итак, зафиксируем, что нам известно:

1.	1.
2. Медь – проводник (*a*)	2. **M*a*S**
3. Медь – металл (*a*),	3. **S*a*P**.

Исходя из этой информации, теперь можно восстановить полный модус следующим образом: можно средний термин (**M**) поставить в большей посылке на место субъекта и идти к модусу **I** фигуры, либо средний термин поставить в большей посылке на место предиката и восстановить энтимему до модуса **II** фигуры, т. е.:

1. **M P**		1. **P M**
2. **S*a*M**	или	2. **S*a*M**
3. **S*a*P**		3. **S*a*P**.

Но во **II** фигуре нет правильных модусов, имеющих в заключении высказывание типа ***a***. Поэтому такая возможность отпадает и остается только первый вариант. Отсюда приходим к выводу, что бóльшая посылка должна быть общеутвердительным высказыванием. Итак:

1. Всякий проводник – металл (*a*)	1. **M*a*P**
2. Медь – проводник (*a*)	2. **S*a*M**
3. Медь – металл (*a*)	3. **S*a*P**.

Перед нами модус *Barbara* **I** фигуры. Тем самым рассуждение, содержащееся в энтимеме, восстановлено до правильного силлогизма. Однако, исходя из логико-прагматических соображений, энтимему нельзя признать удовлетворительной, так как бóльшая посылка в ней является ложной, а потому данную аргументацию нельзя признать корректной.

Рассмотрим еще один пример: «Всякое преступление должно быть наказуемо, значит, и всякое воровство – преступление». Применяя к данной энтимеме указанную выше процедуру, приходим к выводу, что высказывание «Всякое воровство – преступление» является тезисом аргументации, который некто хочет обосновать, а в качестве обосновывающего аргумента выдвигается положение: «Всякое преступление должно быть наказуемо». Из этого анализа вытекает, что меньшим термином (субъектом заключения) будет термин «воровство», а бóльшим термином (предикатом заключения) – термин «преступление». В таком случае термин «должно быть наказуемо» является средним термином, а приведенный аргумент – это бóльшая посылка. Зафиксируем теперь то, что нам известно:

1. Всякое преступление должно быть наказуемо (***a***)
2. ____________________________________
3. Всякое воровство – преступление (***a***)

или то же самое в форме недостроенной фигуры силлогизма:

1. **P*a*M**
2. _____
3. **S*a*P.**

Продолжая действовать далее, мы должны теперь попытаться восстановить энтимему до полного правильного модуса силлогизма одной из фигур. Очевидно, что термины **S** и **M** можно расположить в меньшей посылке только двумя способами:

1. **P*a*M**	1. **P*a*M**
2. **S M**	2. **M S**
3. **S*a*P**	3. **S*a*P**,

(или)

где первое расположение среднего термина даст нам некоторый модус по **II** фигуре, а второе его расположение даст модус по **IV** фигуре.

Но и во **II**, и в **IV** фигурах отсутствуют правильные модусы, у которых заключением было бы высказывание типа ***a***. Таким образом, данную энтимему нельзя в принципе восстановить до правильного силлогизма, а потому она является некорректной. Воровство, конечно же, преступление, но обосновывать этот тезис следует иными аргументами.

§6. Негативная силлогистика

Переходя к рассмотрению негативной традиционной силлогистики, мы начинаем интересоваться внутренней структурой терминов и будем теперь пользоваться не только элементарными (примитивными) терминами вида **S**, **P**, **M**, но и сложными терминами, образованными из простых терминов посредством их отрицания. В качестве специального знака *терминного отрицания* (отрицания для терминов) будем использовать штрих. Таким образом, в негативной (отрицательной) силлогистике у нас появятся новые термины вида **S'**, **P'**, **M'**, которые будут читаться: «не-**S**», «не-**P**», «не-**M**». Например, наряду с положительными (примитивными) терминами «человек», «высокий человек», «человек, знающий все европейские языки», разрешается теперь использовать и такие отрицательные термины, как «не-человек», «не-высокий человек», «человек, не знающий все европейские языки» и т. д.

Особо следует подчеркнуть различие между двумя введенными видами отрицаний, выражаемыми знаками «'» и «¬». Первое отрицание – это операция над терминами, которая позволяет строить из одних терминов другие термины, а именно – отрицательные термины. Второе же отрицание – пропозициональное отрицание – это операция не над терминами, а над высказываниями. Она позволяет из некоторого высказывания строить новое (отрицательное) высказывание.

Введение отрицательных терминов существенно расширяет виды категорических высказываний. Теперь, наряду с высказыванием, например, вида «Всякий **S** есть **P**», у нас будут и высказывания вида «Всякий **S** есть **P'**», «Всякий **S'** есть **P**», «Всякий **S'** есть **P'**». Все эти новые виды высказываний будем относить к высказываниям типа ***a***. Аналогично будем поступать и с категорическими атрибутивными высказываниями типа ***e***, ***i*** и ***o***.

Так как все новые выражения принадлежат к высказываниям типа ***a***, ***e***, ***i*** и ***o***, для них по-прежнему сохраняются условия истинности, заданные в пунктах (1)–(4) §2. Надо только учитывать, что с отрицательными терминами, скажем **P'**, мы будем связывать теперь в точности те предметы из универсума, которые не обладают свойством **P**. На модельных схемах этому будет соответствовать класс предметов, лежащих вне класса **P**, его принято называть *дополнением к* **P** *в универсуме* **U** (см. Рис. 4).

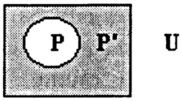


Рис. 4

На рисунке затенением показан класс тех предметов из универсума **U**, которые не обладают свойством **P**. Этот класс и считается обозначаемым отрицательным термином **P'**. Аналогично трактуются и все остальные отрицательные термины.

Какие же изменения произойдут в традиционной силлогистике, если добавить отрицательные термины? Остановимся прежде всего на простых высказываниях, содержащих ровно один термин. Построим с этой целью силлогистическую таблицу истинности (см. Табл. 4).

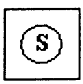
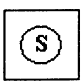
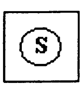
модельные схемы				
	S*a*S'	**S*e*S'**	**S*i*S'**	**S*o*S'**
	л	и	л	и
	S'*a*S	**S'*e*S**	**S'*i*S**	**S'*o*S**
	л	и	л	и
	S'*a*S'	**S'*e*S'**	**S'*i*S'**	**S'*o*S'**
	и	л	и	л

Таблица 4

Из таблицы видно, что в негативной силлогистике появляются новые логические законы. К ним, например, относятся законы вида:

(13) $\models \neg$Всякий **S** есть **S'**.
(14) $\models$ Всякий **S** не есть **S'**.
(15) $\models \neg$Некоторый **S** есть **S'**.
(16) $\models$ Некоторый **S** не есть **S'**.

Поэтому логически истинными высказываниями будут высказывания «Неверно, что всякий человек есть не-человек», «Всякое существо, наделенное разумом, не есть существо, не наделенное разумом», «Неверно, что некоторое четное число есть нечетное число», «Некоторая планета не есть не-планета» и т. д.

Введение отрицательных терминов позволяет получить и новые виды непосредственных умозаключений для случая вхождения в простые высказывания различных терминов. Построим с этой целью силлогистическую таблицу истинности (см. Табл. 5).

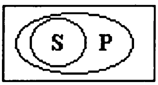
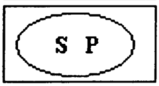
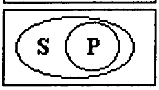
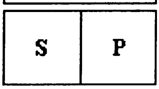
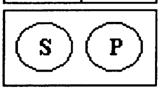
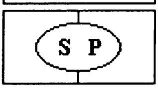
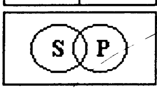
модельные схемы	SaP	SeP	SiP	SoP	SaP'	SeP'	SiP'	SoP'
	1	2	3	4	5	6	7	8
	и	л	и	л	л	и	л	и
	и	л	и	л	л	и	л	и
	л	л	и	и	л	л	и	и
	л	и	л	и	и	л	и	л
	л	и	л	и	и	л	и	л
	л	л	и	и	л	л	и	и
	л	л	и	и	л	л	и	и

Таблица 5

Из таблицы видно, что столбец 5 полностью совпадает со столбцом 2, столбец 6 – со столбцом 1, столбец 7 – со столбцом 4 и столбец 8 – со столбцом 3. Это говорит о наличии отношения *логической эквивалентности* между соответствующими высказываниями. Итак, имеют место следующие умозаключения:

(17) Всякий **S** есть **P** ⊣⊢ Всякий **S** не есть **P'**.
(18) Всякий **S** не есть **P** ⊣⊢ Всякий **S** есть **P'**.
(19) Некоторый **S** есть **P** ⊣⊢ Некоторый **S** не есть **P'**.
(20) Некоторый **S** не есть **P** ⊣⊢Некоторый **S** есть **P'**.

В этих умозаключениях знак «⊣⊢» означает наличие выводимости в обе стороны, т. е. слева направо и наоборот, а сами умозаключения называются операциями *превращения*.

Под *превращением* (*obversio*) понимается непосредственное умозаключение, в котором субъект заключения совпадает с субъектом посылки, а предикатом заключения является термин, противоречащий предикату посылки.

Например, высказывание «Всякий человек разумен» по превращению эквивалентно высказыванию «Ни один человек не является не-разумным», а высказывание «Некоторые озера пресные» превращается в высказывание «Некоторые озера не являются непресными».

Используя две операции (обращение и превращение), в негативной силлогистике можно ввести еще некоторые операции.

Операция *противопоставления предикату* (контрапозиция предикату) получается последовательным применением к исходному высказыванию операции превращения и к полученному результату – операции обращения.

Это приводит к следующим умозаключениям:

(21) Всякий **S** есть **P** ⊣⊢ Всякий **P'** не есть **S**.
(22) Всякий **S** не есть **P** ⊢ Некоторый **P'** есть **S**.
(23) Некоторый **S** не есть **P** ⊣⊢ Некоторый **P'** есть **S**.

При *противопоставлении предикату* термины **S** и **P** меняются местами, и термин **P** берется с отрицанием. Для высказываний типа ***i*** операция противопоставления предикату не выполняется, так как при превращении это выражение перейдет в высказывание типа ***o***, а для последнего нет обращения. Иначе говоря, любое противопоставление предикату высказывания типа ***i*** является неправильным. Примером противопоставления предикату будет переход от высказывания «Все люди – разумные существа» к высказыванию «Ни одно неразумное существо не есть человек».

Операция *противопоставления субъекту* (контрапозиция субъекту) получается последовательным применением к исходному высказыванию операции обращения и к получившемуся результату – операции превращения.

Это приводит к умозаключениям следующих видов:

(24) Всякий **S** есть **P** ⊢ Некоторый **P** не есть **S'**.
(25) Всякий **S** не есть **P** ⊣⊢ Всякий **P** есть **S'**.
(26) Некоторый **S** есть **P** ⊣⊢ Некоторый **P** не есть **S'**.

Как видим, при *противопоставлении субъекту* термины **P** и **S** меняются местами, и термин **S** берется с отрицанием. Для высказывания типа ***o*** операция противопоставления субъекту не выполняется, так как любое обращение этого высказывания неправильно.

Существует еще одна операция, которая называется *операцией одновременного противопоставления субъекту и предикату*, ее часто также называют *чистым противопоставлением* (*чистой контрапозицией* или просто – *контрапозицией*).

***Чистое противопоставление* осуществляется последовательным применением операции превращения, обращения и снова превращения.**

Это дает следующие умозаключения:

(27) Всякий **S** есть **P** ⊣⊢ Всякий **P'** есть **S'**.
(28) Всякий **S** не есть **P** ⊢ Некоторый **P'** не есть **S'**.
(29) Некоторый **S** не есть **P** ⊣⊢ Некоторый **P'** не есть **S'**.

Например, мы можем перейти от высказывания «Все люди – разумные существа» к высказыванию «Все не-разумные существа суть не-люди».

Введение отрицательных терминов существенно обогащает и класс двухпосылочных следований, т. е. класс категорических силлогизмов. Однако в отличие от простого категорического силлогизма в *негативном категорическом силлогизме* общие правила фигур перестают действовать. Так, в негативной силлогистике является правильным следующий модус:

Всякий **M** не есть **P** (*e*)
Всякий **S** не есть **M'** (*e*)
Некоторый **S** есть **P'** (*i*),

который содержит вместо трех терминов – пять, и в котором нарушается правило (3) общих правил силлогизма. Это обстоятельство вновь ставит вопрос о критериях правильности рассуждений, осуществляемых в рамках теперь уже негативной силлогистики.

Данная задача может быть решена различным образом. Можно, например, построить аксиоматическую дедуктивную теорию негативной силлогистики и считать, что некоторый модус этой силлогистики обоснован, если он доказуем в данной теории. На такую возможность для позитивной силлогистики обратил внимание уже сам Аристотель. Он взял в качестве исходных аксиом модусы *Barbara*, *Celarent*, *Darii* и *Ferio* **I** фигуры, а все остальные модусы сводил к указанным.

Его метод получения новых модусов в позитивной силлогистике был закодирован средневековыми логиками в их названиях (см. Табл. 3). Первая заглавная буква в названии модусов **II**, **III** и **IV** фигур указывают, к какому модусу **I** фигуры будет сводиться исследуемый силлогизм; буква «*s*», стоящая сразу после гласной, показывает, что высказывание, обозначенное этой гласной, должно быть подвергнуто чистому обращению; буква «*p*» в такой же позиции говорит, что соответствующее высказывание должно быть обращено с ограничением; буква «*m*» означает, что посылки силлогизма должны быть переставлены местами, т. е. бóльшая посылка становится на место меньшей и наоборот; буква «*k*» служит показателем того, что данный модус надо доказывать методом от противного.

Однако эта задача может быть решена и иным способом. Дело заключается в том, что негативная традиционная силлогистика является фрагментом логики предикатов, а именно – логики одноместных предикатов, ограниченной условием их непустоты и неуниверсальности. Поэтому для проверки правильности негативных категорических силлогизмов можно поступить следующим образом: осуществить перевод категорических атрибутивных высказываний на язык логики предикатов, а далее для проверки правильности силлогистических рассуждений применить методы, используемые в логике предикатов и исчислении предикатов.

Для традиционной силлогистики перевод осуществляется в два этапа. Вначале осуществляется так называемый *фундаментальный перевод*. Будучи применен к элементарным высказываниям типа ***a***, ***e***, ***i*** и ***o***, он имеет следующий вид:

$$\alpha \boldsymbol{a} \beta \to \forall x(\alpha(x) \supset \beta(x)),$$
$$\alpha \boldsymbol{e} \beta \to \forall x(\alpha(x) \supset \neg\beta(x)),$$
$$\alpha \boldsymbol{i} \beta \to \exists x(\beta(x) \,\&\, \beta(x)),$$
$$\alpha \boldsymbol{o} \beta \to \exists x(\alpha(x) \,\&\, \neg\beta(x)).$$

При этом надо иметь в виду, что каждый отрицательный термин, скажем «α'», переводится в исчисление предикатов формулой «$\neg\alpha(x)$». Здесь знак «$\to$» – знак осуществляемого перевода.

Затем к полученному результату применяется функция приписывания *пресуппозиций* (некоторых предварительных условий). В традиционной негативной силлогистике такими предварительными условиями являются требования, чтобы все термины были непустыми и неуниверсальными.

Выразим это более точно. Пусть **A** будет утверждением негативной традиционной силлогистики. Пусть **B** будет формулой исчисления предикатов, образованной из **A** с помощью *фундаментального перевода*. Пусть далее $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – список всех различных элементарных терминов, входящих в **A**. Обозначим через **A*** конъюнкцию вида $\exists x\alpha_1(x) \,\&\, \exists x\alpha_2(x) \,\&\ldots\&\, \exists x\alpha_n(x)$. Она выражает условие о непустоте всех терминов, входящих в **A**. Обозначим посредством **A**** конъюнкцию вида $\exists x\neg\alpha_1(x) \,\&\, \exists x\neg\alpha_2(x) \,\&\ldots\&\, \exists x\neg\alpha_n(x)$. Она выражает условие о неуниверсальности всех терминов, входящих в **A**. Тогда можно показать справедливость следующего утверждения:

A является *общезначимым выражением традиционной негативной силлогистики* тогда и только тогда, когда выражение ((A* & A) $\supset$ B) является общезначимой формулой логики предикатов (теоремой исчисления предикатов).**

Таким образом, проверять правильность силлогизмов можно и в рамках исчисления предикатов, и в рамках логики предикатов.

Покажем, как это можно делать, на примере приведенного выше модуса негативной силлогистики:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Всякий } \mathbf{M} \text{ не есть } \mathbf{P}\ (e)\\ \text{Всякий } \mathbf{S} \text{ не есть } \mathbf{M}'\ (e)\end{array}}{\text{Некоторый } \mathbf{S} \text{ есть } \mathbf{P}'\ (i).}$$

Так как в данный силлогизм входят три примитивных термина – **S**, **P** и **M**, то формула $\exists x\mathbf{S}(x)\ \&\ \exists x\mathbf{P}(x)\ \&\ \exists x\mathbf{M}(x)$ выражает условие непустоты этих терминов, а формула $\exists x\neg\mathbf{S}(x)\ \&\ \exists x\neg\mathbf{P}(x)\ \&\ \exists x\neg\mathbf{M}(x)$ выражает условие их неуниверсальности. Осуществим теперь фундаментальный перевод с языка силлогистики на язык исчисления предикатов посылок и заключения данного модуса. В результате получим следующие формулы: $\forall x(\mathbf{M}(x) \supset \neg\mathbf{P}(x))$ – как перевод первой посылки, $\forall x(\mathbf{S}(x) \supset \neg\neg\mathbf{M}(x))$ – перевод второй посылки и $\exists x(\mathbf{S}(x)\ \&\ \neg\mathbf{P}(x))$ – перевод заключения. Таким образом, требуется обосновать метаутверждение о выводимости следующего вида:

$$\frac{\begin{array}{l}\exists x\mathbf{S}(x)\ \&\ \exists x\mathbf{P}(x)\ \&\ \exists x\mathbf{M}(x)\\ \exists x\neg\mathbf{S}(x)\ \&\ \exists x\neg\mathbf{P}(x)\ \&\ \exists x\neg\mathbf{M}(x)\\ \forall x(\mathbf{M}(\mathbf{x}) \supset \neg\mathbf{P}(x))\\ \forall x(\mathbf{S}(x) \supset \neg\neg\mathbf{M}(x))\end{array}}{\exists x(\mathbf{S}(x)\ \&\ \neg\mathbf{P}(x))\ .}$$

Данное метаутверждение о выводимости можно обосновать, например, в натуральном исчислении предикатов с помощью соответствующего вывода:

1. $\exists x\mathbf{S}(x)\ \&\ \exists x\mathbf{P}(x)\ \&\ \exists x\mathbf{M}(x)$ – пос.
2. $\exists x\neg\mathbf{S}(x)\ \&\ \exists x\neg\mathbf{P}(x)\ \&\ \exists x\neg\mathbf{M}(x)$ – пос.
3. $\forall x(\mathbf{M}(\mathbf{x}) \supset \neg\mathbf{P}(x))$ – пос.
4. $\forall x(\mathbf{S}(x) \supset \neg\neg\mathbf{M}(x))$ – пос.
5. $\exists x\mathbf{S}(x)$ – $\&_{\text{и}}$, 1
6. $\mathbf{S}(x)$ – $\exists_{\text{и}}$, 5, x - абс. огр.
7. $\mathbf{S}(x) \supset \neg\neg\mathbf{M}(x)$ – $\forall_{\text{и}}$, 4
8. $\neg\neg\mathbf{M}(x)$ – $\supset_{\text{и}}$, 7, 6
9. $\mathbf{M}(x)$ – $\neg_{\text{и}}$, 8
10. $\mathbf{M}(\mathbf{x}) \supset \neg\mathbf{P}(x)$ – $\forall_{\text{и}}$, 3

11. $\neg P(x)$ — $\supset$и, 10, 9
12. $S(x) \& \neg P(x)$ — &в, 6, 11
13. $\exists x(S(x) \& \neg P(x))$ — $\exists$в, 12

Так как в данном выводе в посылках и заключении не встречается свободно переменная x, которая абсолютно ограничивалась, то вывод является завершенным, и тем самым рассматриваемый модус негативной силлогистики обоснован.

Этот же самый результат можно получить и методом аналитических таблиц, что предоставляется проверить самим читателям.

ГЛАВА VI

ПОНЯТИЕ

§1. Общая характеристика понятий

Термины естественного языка (значимые слова или словосочетания, входящие в состав предложений) имеют две важнейшие характеристики: значение и смысл. Напомним, что под значением (экстенсионалом) термина понимают предмет (предметы), знаком которого (которых) данный термин является. Под смыслом (интенсионалом) термина имеют в виду ту информацию о значении, которую содержит сам термин или которая связывается с ним. В обыденной жизни мы не очень задумываемся о смысле терминов. Вполне достаточной оказывается та языковая интуиция, которая стихийно складывается у каждого человека в ходе овладения языком. Эта интуиция состоит в том, что со словами связываются некоторые представления, посредством которых осуществляется соотнесение слов с их значениями. Последние позволяют успешно пользоваться терминами языка и не путать предметы, обозначенные, скажем, словом «стул», с диванами, скамейками, табуретками, креслами и иными предметами, не являющимися стульями.

Однако в целом ряде случаев требуется особая точность, когда опора только на нашу интуицию может давать «сбой». Например, некто **a** заключил договор с **b** на покупку партии стульев и через некоторое время получил от **b** партию табуреток. Спрашивается, как они установят это расхождение, если **b** будет настаивать на том, что он прислал именно стулья? Чтобы такие коллизии не возникали, в самом тексте договора тем или иным способом стараются зафиксировать, о каком товаре идет речь, каковы его характеристики, т. е. договариваются об одинаковой трактовке терминов.

Другой областью, где также важна четкая терминология, является юриспруденция (область судопроизводства). Здесь всегда необходимо знать, подпадают ли поступки **a** под ту или иную статью закона. Ведь от этого знания часто зависит судьба человека, а может быть, и его жизнь. Поэтому в соответствующих кодексах стараются однозначно зафиксировать используемую в судопроизводстве терминологию. В частности, пытаются четко указать, какие именно деяния могут быть квалифицированы соответствующей статьей, т. е. какого рода поступки могут быть названы такими терминами, как «преступление», «небрежность», «халатность», «получение взятки», «хищение», «спекуляция» и др.

Столь же важное значение имеет точная терминология в научных исследованиях. Так, если в евклидовой геометрии доказывается теорема «Сумма внутренних углов треугольника равна 2d», то для понимания этого утверждения надо предварительно знать, что имеется в виду под словами «треугольник», «внутренние углы», «сумма» и что за величина обозначена выражением «2d». Без такого знания мы не только не сможем доказать данное утверждение, но и попросту не поймем его.

Необходимость принятия терминологических соглашений вытекает из факта многозначности слов естественного языка, проявляющегося при их интуитивном использовании. Ведь у разных людей может существовать разная интуиция, разное понимание смыслов терминов. Употребляя одни и те же слова, но вкладывая в них разный смысл, мы теряем возможность правильно передавать другим свои мысли, желания, намерения и, наоборот, теряем способность понимать то, что нам пытается сообщить собеседник. Именно в этом скрывается причина многих споров. Люди не соглашаются друг с другом не потому, что придерживаются разных мнений, а лишь потому, что по-разному (в разном смысле) употребляют одни и те же слова. В таких случаях говорят, что спор идет о словах. Итак, существует насущная необходимость в однозначном понимании лексики языка. Но что значит понимать термин, и как можно достичь однозначного понимания?

Понимать термин **– значит знать, какие именно предметы подпадают под него, т. е. по любому предъявленному нам предмету уметь устанавливать, можно ли данный предмет обозначить данным термином.**

Зная это, человек мысленно выбирает из совокупности всех предметов в точности те из них, которые обозначаются этим термином, т. е. проводит мысленно границу между теми предметами, которые подпадают под него, и теми, которые под него не подпадают. Чтобы достичь такого понимания, с термином соединяют особую мысль, в которой как раз и раскрывается его понимание. Эта мысль называется *понятием*.

***Понятие* есть мысль, которая посредством указания на некоторый признак выделяет из универсума и собирает в класс (обобщает) предметы, обладающие этим признаком.**

Например, мысль, выраженная словосочетанием «замкнутая геометрическая фигура, ограниченная тремя сторонами», является понятием, так как она позволяет мысленно собрать в один класс все геометрические фигуры, обладающие признаком «быть замкнутой и ограниченной тремя сторонами», и тем самым отличить их от всех иных геометрических фигур, не обладающих данным признаком. Эта мысль может быть соединена с термином «треугольник», и тогда она указывает на наше понимание этого термина. В этом случае говорят, что рассматриваемая мысль является понятием треугольника.

Необходимо не путать сам термин и понимание этого термина, его понятие. С одним и тем же термином могут связываться разные понятия. Так, с термином «человек» могут быть соединены такие понятия человека: (1) «двуногое и бесперое существо» (Платон), (2) «животное, обладающее мягкой мочкой уха», (3) «политическое животное» (Аристотель), (4) «животное, способное производить орудия труда» (Б. Франклин), (5) «животное, обладающее членораздельной речью» и др. Из данных примеров видно, что понятия человека отличаются друг от друга использованием разных признаков для отделения класса людей от всех остальных предметов.

С синтаксической точки зрения и в самом общем виде любое понятие выражается в языке конструкцией вида:

$$\alpha\mathbf{A}(\alpha),$$

которая называется *универсалией*. Читается эта конструкция следующим образом: «предмет α из универсума $\mathbf{U}$ такой, что α обладает признаком $\mathbf{A}(\alpha)$». Универсум $\mathbf{U}$, по которому пробегает переменная α, называется *родом*, а признак $\mathbf{A}(\alpha)$ – *видовым отличием*. Таким образом, всякое понятие выделяет в универсуме (роде) $\mathbf{U}$ те и только те предметы, которые обладают видовым отличием $\mathbf{A}(\alpha)$. Графически это можно изобразить следующей схемой (Рис. 1).

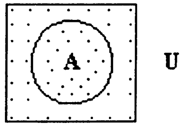


Рис. 1

На рисунке универсум (род) **U** изображен квадратом. Точками изображены предметы, входящие в **U**, а кружком, помеченным буквой «**A**», изображен класс предметов, который выделен из универсума посредством видового отличия **A**(α).

В естественном языке при формулировке понятий явно указывается и род (универсум), и видовое отличие, как, например, в понятии «животное, способное производить орудия труда», где термин «животное» указывает на род, а словосочетание «способное производить орудия труда» – на видовое отличие. В записи же понятий на языке исчисления предикатов в виде универсалии α**A**(α) универсум явно не указывается. Однако, поскольку в данном выражении α – переменная, а переменные обязательно имеют области изменения своих значений, то универсум, по которому пробегает эта переменная, обязательно подразумевается. Поэтому, чтобы записать понятие в форме универсалии, предварительно необходимо указать универсум рассуждения, т. е. род для понятия. Например, если взять понятие человека, принадлежащее Аристотелю – «политическое животное», – то при записи его в прикладном исчислении предикатов в форме:

$$x\exists y(\text{Полис}(y)\ \&\ \text{Гражданин}(x, y)) \quad \cdot$$

мы предварительно должны договориться, что переменная x пробегает по классу животных, а переменная y – по классу государств. И эта информация должна проговариваться, когда мы читаем данное выражение, а именно: «предмет x из класса животных, такой что существует y из класса государств, такой что y – это полис и x гражданин y».

В связи с данным примером обратим внимание на следующее обстоятельство. В аристотелевском понятии человека свойство «быть политическим» являлось весьма туманным, а потому его требовалось каким-то образом уточнить, что и было сделано указанием на существование y – полисной структуры организации греческих государств – и отношения x в качестве гражданина к этому y. Свойство «быть политическим» в его точном аристотелевском смысле тем самым оказалось сложным свойством.

И еще одна важная особенность демонстрируется приведенным примером. При записи понятия был использован квантор существования для связывания переменной y в выражении «Полис(y) & Гражданин(x, y)». Это обусловлено требованием к построению универсалий. Выражение $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ будем далее считать правильно построенным, если в видовом отличии $\mathbf{A}(\alpha)$ свободными являются в точности те переменные, которые входят в выражение α. Если это условие не выполнено, то такие универсалии в данном учебнике будут рассматриваться как неправильно построенные выражения.

С семантической точки зрения, каждое понятие обладает двумя важнейшими характеристиками – *содержанием* и *объемом*.

***Содержанием понятия*, выраженного универсалией $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$, называется признак $\mathbf{A}(\alpha)$, на основании которого выделяются предметы из универсума и обобщаются в класс.**

***Объемом понятия*, выраженного универсалией $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$, называется класс всех тех предметов α из универсума $\mathbf{U}$, которые обладают признаком $\mathbf{A}(\alpha)$.**

Объем понятия будем представлять выражением $\mathrm{W}\alpha\mathbf{A}(\alpha)$, которое читается: «класс тех предметов α из универсума $\mathbf{U}$, для которых верно $\mathbf{A}(\alpha)$», где знак «W» есть *оператор объемности*. В отличие от кванторов общности и существования, которые были введены ранее, оператор объемности является не высказываниеобразующим, а имяобразующим оператором, т. е. по высказывательной форме $\mathbf{A}(\alpha)$ с помощью этого оператора образуется имя соответствующего объема понятия. Кроме того, как и кванторы, оператор объемности W связывает переменную α в выражении $\mathrm{W}\alpha\mathbf{A}(\alpha)$.

Итак, будем далее считать, что *значением универсалии* $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ как языкового выражения особого типа является $\mathrm{W}\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ – объем соответствующего понятия, а *смыслом универсалии* – содержание этого понятия – признак $\mathbf{A}(\alpha)$. Сказанное можно представить в виде семантического треугольника (см. Рис. 2). Тогда понятие следует ассоциировать с комплексом, в который входит универсалия $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$, ее объем – $\mathrm{W}\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ и ее содержание – $\mathbf{A}(\alpha)$.

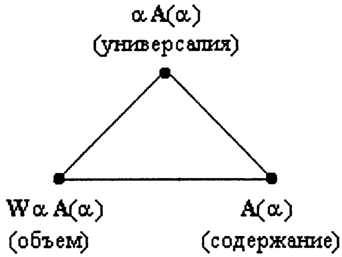


Рис. 2

Будем далее те предметы, которые входят в объемы понятий, называть *элементами* их объемов. Для любого понятия $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ тот факт, что некоторый предмет v из универсума **U** подпадает под это понятие, обозначается записью

$$v \in \mathrm{W}\alpha\mathbf{A}(\alpha),$$

которая читается: «v является элементом $\mathrm{W}\alpha\mathbf{A}(\alpha)$». Если же v не подпадает под понятие $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$, то это записывается в виде:

$$v \notin \mathrm{W}\alpha\mathbf{A}(\alpha),$$

что читается: «v не является элементом $\mathrm{W}\alpha\mathbf{A}(\alpha)$».

§2. Виды понятий

При выделении видов понятий можно учитывать различные их особенности. Можно учитывать лингвистическую структуру соответствующей универсалии, или семантические характеристики, или их гносеологическое значение и т. п. Далее будут указаны лишь такие виды понятий, которые выделяются по их основным логическим особенностям.

1. С *синтаксической* точки зрения, т. е. с точки зрения структуры универсалий, посредством которых в языке выражается содержание понятий, последние делятся на *простые* и *сложные*.

К *простым* относятся те понятия, содержание которых выражается элементарными формулами логики предикатов, т. е. формулами вида $\Pi(\alpha)$, где Π – предикаторная константа.

Например, (а) xЧеловек(x) – «x из класса животных такой, что x является человеком», (б) xТреугольник(x) – «x из класса геометрических фигур такой, что x – треугольник», (в) xГород(x) – «x из класса населенных пунктов такой, что x – город».

Специально обращаем внимание, что предикаторы типа «человек», «треугольник», «город» и т. д. не являются универсалиями, а потому они и не выражают понятий. Различие между предикаторами и рассматриваемыми простыми универсалиями состоит в том, что универсалия указывает на род и видовое отличие, а потому она и выражает понятия. Предикаторы же, например предикатор «человек», не указывают на род, в котором выделяется класс людей.

К *сложным* относятся те понятия, содержание которых выражается сложными формулами логики предикатов, т. е. формулами А(α), в состав которых входят логические константы.

Например, (а') $x\exists y$(Орудия труда(y) & Способен сделать(x, y)) – «животное, способное производить орудия труда», (б') x(Замкнута(x) & число сторон(x) = 3) – «геометрическая фигура, замкнутая тремя сторонами».

Простым понятиям (а), (б) могут быть сопоставлены, соответственно, сложные понятия (а'), (б'). Что означает такое сопоставление, будет объяснено в следующей главе.

Среди простых понятий можно выделить такие понятия, которым нельзя в явной форме сопоставить сложные понятия, так как предметы, входящие в их объемы, не удается описать какими-либо сложными признаками, отличными от признаков самих простых понятий. Поэтому разъяснить, какого рода предметы имеются в виду под данными понятиями, можно лишь на примерах, с помощью предъявления соответствующих экземпляров. Такого рода понятия играют чрезвычайно важную роль в познавательном процессе, так как они лежат в основе всего нашего знания о мире. Именно с их помощью задается содержание других понятий, поэтому они называются *фундаментальными* понятиями. К их числу относятся такие понятия: «xМножество(x)», «xИндивид(x)», «xТочка(x)», «xПлоскость(x)», «xПрямая(x)», «$\langle x, y\rangle$ Принадлежит(x, y)», «$\langle x, y\rangle$Конгруэнтно(x, y)» и многие другие. Используя последние пять понятий, в геометрии задают все остальные понятия – понятие геометрической фигуры, угла, треугольника, квадрата, катета и др. В классической механике фундаментальными являются понятия массы, времени и длины, посредством которых выражаются остальные физические величины.

2. По *объемной* (семантической) характеристике понятия делятся на *пустые* и *непустые*. Последние, в свою очередь, делятся на *единичные* и *общие*. Рассмотрим эти виды понятий.

Пустые понятия **– это понятия, в объеме которых нет ни одного элемента.**

Непустые понятия **– это понятия, в объеме которых содержится хотя бы один элемент.**

Например, мысль, выраженная словосочетанием «человек, побывавший на Марсе», является пустым понятием, так как нет ни одного объекта, который бы обладал признаком «быть человеком, побывавшим на Марсе». Естественно, это понятие перестанет быть пустым, после того как люди совершат космическое путешествие на Марс. Пустыми являются понятия «наибольшее натуральное число», «нынешний король Франции», «среда, колебание которой представляет собой распространение света». Последнее понятие раскрывает смысл, который в науке долгое время соотносили с термином «эфир».

Необходимо различать понятия, пустота которых обусловлена разными причинами. Понятие может быть пустым в силу стечения обстоятельств, когда фактический ход истории не позволил осуществиться некоторому событию, хотя при других условиях это событие могло бы произойти, и тогда данное понятие было бы непустым. Таковым является понятие «найденный А. С. Пушкиным клад древних монет».

Другой причиной пустоты может быть невозможность существования предметов со свойством **А**(α), вытекающая из законов природы. Примерами таких пустых понятий являются понятия «вечный двигатель», «металл, не проводящий электрический ток», «бессмертный человек» и т. д.

Отметим, что относительно многих понятий, фигурирующих в науке, до сих пор не известно, пусты они или нет. Таковым является, например, понятие «нечетное совершенное число» (совершенным называется число, сумма делителей которого, отличных от него самого, равна этому числу). Четные совершенные числа известны: это, например, число 6. Но прошло уже несколько тысячелетий, а ученые до сих пор не выяснили, имеются ли нечетные совершенные числа. Другим примером является понятие «элементарная частица, движущаяся со скоростью, большей скорости света». Ученые даже придумали название для таких частиц – «тахионы». Но вот имеются ли они в нашем мире – это пока неизвестно. Понятия, пустота которых обусловлена указанными выше двумя причинами, называются *фактически пустыми.*

Но понятия могут быть пусты не только по фактическим основаниям, но и в силу законов логики. У последних видовое отличие $\mathbf{A}(\alpha)$ является самопротиворечивым, т. е. представляет собой логическое противоречие, как, например, у понятия некруглого круга. Такие понятия называются *логически пустыми.*

Если $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ – пустое понятие, то – независимо от того, фактически или логически оно пусто – $W\alpha\mathbf{A}(\alpha) = \varnothing$, где «$\varnothing$» – знак пустого множества.

К *единичным* относятся те понятия, в объеме которых содержится ровно один элемент.

Например, понятие «древнегреческий философ, выпивший по решению афинского суда яд цикуты» содержит в своем объеме ровно один предмет, которым является Сократ, понятие «автор романа "Евгений Онегин"» содержит в объеме только лишь А. С. Пушкина, а понятие «простое четное число» содержит в качестве элемента лишь число 2.

Единичные понятия следует отличать от имен. Если с помощью имен мы только выделяем некоторый предмет из универсума $\mathbf{U}$, то с помощью понятий определенные предметы не только выделяются из универсума, но и обобщаются (собираются) в класс. А потому значением (экстенсионалом) имен является некоторый предмет v, который они именуют, значением же единичных понятий (универсалий) является не сам предмет v, а одноэлементное множество $\{v\}$, а это разные объекты.

Про некоторое отдельно взятое выражение естественного языка часто трудно бывает сказать – имя это или универсалия. Так, словосочетание «автор романа "Евгений Онегин"» можно трактовать и как имя, и как универсалию. Различить эти два варианта трактовки возможно лишь в конкретных контекстах употребления данного выражения, а строго говоря, только в формальном языке логики предикатов.

К *общим* относятся понятия, в объеме которых содержится более чем один элемент.

Такими понятиями являются понятия «человек, умеющий играть на скрипке», «учащийся высшего учебного заведения», «спортсмен, завоевавший первое место на Олимпийских играх» и т. д.

Среди рассмотренных понятий можно выделить еще две их разновидности – *универсальные* и *неуниверсальные* понятия.

К числу *универсальных* относятся те понятия, объемы которых совпадают с универсумом (родом) данного понятия. К числу же *неуниверсальных* относятся все остальные понятия.

Универсальные понятия не несут никакой дополнительной информации об объектах универсума. Например, в универсуме (роде) квадратов таким понятием будет понятие «квадрат, у которого все стороны равны». Так как видовое отличие – «равенство всех сторон» – присуще всем квадратам, эта характеристика не добавляет ничего нового к знанию о квадратах. Если $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ – универсальное понятие, то $\mathrm{W}\alpha\mathbf{A}(\alpha) = \mathbf{U}$, где $\mathbf{U}$ – род данного понятия.

3. По *содержанию* видового отличия $\mathbf{A}(\alpha)$ понятия подразделяют на *положительные* и *отрицательные*.

***Положительные* – это такие понятия, в содержании $\mathrm{A}(\alpha)$ которых нет знаков логического отрицания «$\neg$».**

Почти все примеры понятий, приводившиеся выше, были именно такого типа.

К *отрицательным* относятся те понятия, в содержании которых используются знаки отрицания «$\neg$».

Например, в геометрии на плоскости отрицательным понятием будет понятие о параллельных прямых как таких пар прямых, которые не имеют ни одной общей точки или же все точки которых совпадают. Это понятие может быть выражено следующей формальной записью: $<x, y>(\forall z(\text{Принадлежит}(z, x) \equiv \text{Принадлежит}(z, y)) \vee \neg\exists z$ $(\text{Принадлежит}(z, x)\ \&\ \text{Принадлежит}(z, y)))$, где x и y пробегают по множеству прямых, лежащих в одной плоскости, а z – по множеству точек этой плоскости.

***Относительными* являются те понятия, в которых признак А(α) представляет собой реляционное свойство.**

Поясним сказанное. Известно, что по любому n-местному признаку (отношению) $\mathbf{A}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ можно образовать новый признак меньшей местности. Для этого достаточно подставить вместо некоторой свободной переменной константу либо связать ее каким-либо квантором. Уменьшая таким образом местность исходного признака, можно получить в результате признак вида $\mathbf{A}(\alpha_i)$, где единственной свободной переменной будет α_i. Получившееся выражение задает уже некоторое свойство, образованное из n-местного отношения, а потому такого рода признаки называются «свойствами, образованными от отношений», или более просто – *реляционными свойствами* (от слова «реляция» – отношение).

Понятия, образованные с помощью таких реляционных свойств как раз и называются относительными понятиями. Таковыми будут, например, понятия человека, заданные выражениями «животное, способное производить орудия труда» и «животное, являющееся гражданином полиса».

***Безотносительными* являются понятия, видовое отличие которых – А(α) – не является реляционным свойством.**

Примером может служить платоновское понятие человека как двуногого и бесперого существа.

Наконец, среди относительных понятий можно выделить пары понятий, которые называются *соотносительными понятиями*. К их числу принадлежат понятия, образованные за счет использования двухместного отношения, причем данное отношение таково, что в языке существуют специальные термины **С** и **В** для обозначения, соответственно, предметов α, находящихся в отношении $\mathbf{A}(\alpha, \beta)$, и предметов β, находящихся в отношении $\mathbf{A}(\alpha, \beta)$. В этом случае понятие о предметах **С** задается универсалией «$\alpha\exists\beta\mathbf{A}(\alpha, \beta)$», а понятие о предметах **В** – универсалией «$\beta\exists\alpha\mathbf{A}(\alpha, \beta)$». Сами понятия **С** и **В** считаются при этом соотнесенными, так как каждое из них предполагает другое.

Возьмем, например, двухместное отношение «Обучает(x, y)» и образуем понятие о первой компоненте пары – $x\exists y$Обучает(x, y). Это понятие задает смысл термина «учитель». Сформулируем теперь понятие о второй компоненте – $y\exists x$Обучает(x, y). Это понятие задает смысл термина «ученик». Таким образом, понятия «учитель» и «ученик» считаются взаимно соотнесенными. Произнося термин «учитель», мы предполагаем наличие ученика, а произнося термин «ученик», предполагаем наличие учителя. Соотнесенными понятиями будут понятия «раб» и «рабовладелец», «начальник» и «подчиненный», «делимое» и «делитель» и др.

4. Наиболее сложной является классификация видов понятий *по типам обобщаемых предметов*. Причина этого состоит в чрезвычайно разнообразной и сложно организованной типологии предметов. Поэтому мы остановимся только на наиболее простых, часто встречающихся в повседневной практике логических типах понятий.

В логике и философии термин «*предмет*» понимается очень широко. Предмет – это все, что может стать объектом исследования, о чем мы можем нечто утверждать или отрицать, т. е. все то, что может быть предметом нашей мысли. Если поставить вопрос так: а что не может быть предметом мысли, то ответ будет таков – в мире нет ничего, что не могло бы мыслиться человеком. Человек может сделать предметом своей мысли буквально все – начиная от пустоты, ничто, и кончая своей собственной мыслью, которую он также может подвергнуть исследованию. Итак, предмет – это все, что угодно. Однако некоторые предметы мы далее будем трактовать как *индивиды*, другие же как упорядоченные *n-ки индивидов* $<v_1, v_2,..., v_n>$, где $n > 1$, либо как *свойства*, присущие этим индивидам, либо как некоторые *отношения*, в которых находятся индивиды, либо как *собрания* (*классы*) индивидов или *n*-ок индивидов, либо как предметные функции (*предметно-функциональные характеристики*) индивидов. Это и есть основные типы предметов.

Словесно описать, что имеют в виду, когда употребляют термин «индивид», невозможно. Но если все-таки попытаться это сделать, то можно было бы индивид охарактеризовать как некоторую единичность, некоторую целостность, которую мы тем или иным способом выделяем во внешней действительности или во внутреннем (духовном) мире человека. Индивид – это то, что обладает самостоятельным существованием или, по крайней мере, мы ему приписываем такую самосущность. В этом смысле *n-ки,* свойства, отношения, множества и предметно-функциональные характеристики не являются самосущими предметами, так как это всегда *n*-ки чего-то, свойства, принадлежащие чему-то, отношения, существующие между чем-то, классы и предметно-функциональные характеристики каких-то индивидов или *n*-ок индивидов.

Конечно, приведенное только что описание не является удовлетворительным, ведь понятие индивида фундаментально, оно несводимо к более простым и может быть разъяснено только на примерах. Индивидами (индивидуальными предметами) являются отдельные столы, дома, планеты, города, машины, элементарные частицы, галактики, особи животного и растительного мира. Сюда же относятся *абстрактные* и *идеальные* предметы: различного рода числа, геометрические фигуры, инерциальные системы отсчета, меридианы и параллели, пространственные и временные точки и т. д. В число индивидов попадут и различного рода мифологические и литературные персонажи. *С логической точки зрения, индивиды – это предметы, образующие исходный универсум рассуждения.*

Учитывая сказанное, мы будем выделять: (а) понятия об индивидах, (б) понятия об *n*-ках индивидов, (в) понятие о свойствах, присущих индивидам, (г) понятия об отношениях, в которых находятся индивиды, (д) понятия о предметно-функциональных характеристиках индивидов, а также (е) понятия о множествах индивидов.

Итак, в зависимости от того, какие типы предметов обобщаются в понятиях, они делятся на следующие виды.

(а) *Понятия об индивидах.* В этом случае «α» в выражении $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ есть некоторая индивидная (предметная) переменная, скажем x, и структура понятия будет иметь вид

$$x\mathbf{A}(x),$$

что читается: «$x \in \mathbf{U}$, такой что $\mathbf{A}(x)$». Большинство вышеприведенных примеров понятий были как раз этого вида.

(б) *Понятия об n-ках индивидов.* В этом случае α есть упорядоченная *n*-ка индивидных переменных, скажем $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$, где $n > 1$, а структура понятия имеет вид:

$$\langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle \mathbf{A}(x_1, x_2, ..., x_n),$$

что читается: «n-ка индивидов $\langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$, где $x_1 \in \mathbf{U}_1$, $x_2 \in \mathbf{U}_2, ...,$ $x_n \in \mathbf{U}_n$, такая что $\mathbf{A}(x_1, x_2, ..., x_n)$».

Пусть x и y пробегают по универсуму натуральных чисел, тогда универсалия $\langle x, y \rangle(x < y)$ выражает понятие о парах $\langle x, y \rangle$ натуральных чисел, находящихся в отношении «меньше». В объем этого понятия – $\mathrm{W}\langle x, y \rangle(x < y)$ – войдут те и только те пары чисел, у которых первая компонента меньше второй: <1, 2>, <3, 7>, <100, 101> и т. д.

Пусть переменные x, y и z принимают значения на множестве людей, тогда понятие $\langle x, y \rangle \exists z$(Предок (z, x) & Предок (z, y)) задает смысл термина естественного языка «родственники». Согласно этому понятию, родственниками считается такая пара людей, у которых имеется общий предок.

Пусть x и y принимают значения из класса городов, а z – из множества величин длин, выраженных в километрах. Тогда элементами объема понятия $\langle x, y, z \rangle$(Расстояние между $(x, y) = z$) будут упорядоченные тройки $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, где v_1 и v_2 – города, а v_3 – величина расстояния между ними.

Пусть x и y принимают значения из класса людей. Тогда выражение $\langle x, y \rangle$(Мужчина(x) & Родитель(x, y)) есть понятие о таких парах людей, первый из которых является отцом второго.

(в) *Понятия о свойствах, присущих индивидам.* В этом случае «α» в выражении $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ есть некоторая одноместная предикаторная переменная, скажем $\boldsymbol{P}$, и понятие имеет вид

$$\boldsymbol{P}\mathbf{A}(\boldsymbol{P}).$$

Читается данное выражение следующим образом: «свойство $\boldsymbol{P}$, заданное на множестве $\mathbf{U}$, такое что верно $\mathbf{A}(\boldsymbol{P})$».

Например, универсалия $\boldsymbol{P}\forall x$(Металл$(x) \supset \boldsymbol{P}(x)$) выражает понятие «свойство $\boldsymbol{P}$, заданное на классе материальных предметов, такое что $\boldsymbol{P}$ присуще всем металлам». В объем – $\mathrm{W}\boldsymbol{P}\forall x$(Металл$(x) \supset \boldsymbol{P}(x)$) – этого понятия войдут такие свойства металлов, как их электропроводность, теплопроводность, наличие свободных электронов и другие общие для всех металлов свойства.

Универсалия $\boldsymbol{P}\exists x \boldsymbol{P}(x)$, где x принимает значения из множества планет Солнечной системы, выражает понятие «свойство $\boldsymbol{P}$, заданное на множестве планет Солнечной системы, такое что $\boldsymbol{P}$ присуще хотя бы одной планете этой системы». В объем – $WP\exists xP(x)$ – этого понятия войдут свойства – «движение вокруг Солнца по эллиптической орбите», «наличие массы», «наличие атмосферы», «наличие жизни» и др.

(г) *Понятия об отношениях*, в которых находятся индивиды. В этом случае «α» в выражении $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ есть некоторый n-местный предикаторный символ, скажем $\boldsymbol{R}^{n}$, где $n > 1$. Структура понятия примет в этом случае вид

$$\boldsymbol{R}^{n}\mathrm{A}(\boldsymbol{R}^{n}).$$

Читается: «отношение $\boldsymbol{R}^{n}$, заданное на универсуме всевозможных n-ок $<x_1, x_2,..., x_n>$, где $x_1 \in \mathbf{U}_1, x_2 \in \mathbf{U}_2,\ldots, x_n \in \mathbf{U}_n$, такое что верно $\mathbf{A}(\boldsymbol{R}^{n})$».

Например, универсалия $\boldsymbol{R}\forall x\boldsymbol{R}(x, x)$, где x пробегает по множеству натуральных чисел, выражает понятие «двухместное отношение $\boldsymbol{R}$, заданное на натуральных числах, такое что каждое натуральное число находится в отношении $\boldsymbol{R}$ к самому себе». В объем – $W\boldsymbol{R}\forall x\boldsymbol{R}(x, x)$ – войдут отношения «$\geqslant$», «$=$» и др. Для них верно «$x \geqslant x$», «$x = x$» для любых натуральных чисел.

Пусть x, y и z пробегают по множеству людей, тогда универсалия вида $\boldsymbol{R}\forall x\forall y(\boldsymbol{R}(x, y) \equiv \exists z(\text{Предок}(z, x)\ \&\ \text{Предок}(z, y)))$ задает понятие о некотором двухместном отношении. В объем этого понятия войдет ровно одно двухместное отношение – «быть родственниками». Таким образом, данное понятие будет по объему единичным.

Универсалия $\boldsymbol{RR}(6, 3)$ есть понятие обо всех двухместных отношениях между числами 6 и 3. Таковыми будут: «быть больше», «делиться на» и др.

Пусть $\boldsymbol{R}$ есть двухместное отношение, заданное на множестве пар людей. Тогда универсалия $\boldsymbol{R}\forall x\forall y(\boldsymbol{R}(x, y) \equiv (\text{Мужчина}(x)\ \&\ \text{Родитель}(x, y)))$ есть понятие об отношении, выражаемом в русском языке термином «отец».

(д) *Понятия о предметно-функциональных характеристиках индивидов*. В этом случае «α» в выражении $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ есть некоторый n-местный предметно-функциональный символ, скажем $\boldsymbol{f}^{n}$, где $n > 0$. Структура понятия имеет теперь вид

$$\boldsymbol{f}^{n}\mathrm{A}(\boldsymbol{f}^{n})$$

и читается: «n-местная предметная функция, заданная на универсуме всевозможных n-ок $<x_1, x_2,..., x_n>$, где $x_1 \in \mathbf{U}_1, x_2 \in \mathbf{U}_2,\ldots, x_n \in \mathbf{U}_n$, и принимающая значение в универсуме $\mathbf{U}_{n+1}$, такая, что $\mathbf{A}(\boldsymbol{f}^{n})$».

Пусть f – это одноместная функция, заданная на небесных телах, а **a** – планета Земля, и переменная z пробегает по универсуму всевозможных величин (действительные числа с различной размерностью), тогда универсалия $f\exists z(f(\mathbf{a}) = z)$ выражает понятие «предметно-функциональная характеристика f, заданная на множестве планет, такая что имеется некоторая величина z и эта величина = f(Земли)». В объем этого понятия – $\mathrm{W}f\exists z(f(\mathbf{a}) = z)$ – войдут такие, например, предметно-функциональные характеристики Земли, как ее «масса», «температура», «объем» и др.

Пусть f – одноместная функция, заданная на множестве людей, x и y пробегают также по множеству людей. Тогда универсалия $f\forall x\exists y(f(x) = y \equiv$ (Мужчина(y) & Родитель(y, x))) есть понятие об одноместной предметной функции, выражаемой в русском языке термином «отец» в контекстах вида «отец x-а», т. е. отец кого-то.

(e) *Понятие о множествах индивидов.* В этом случае «α» в выражении $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ есть переменная для множеств, скажем V. Структура понятия принимает вид

$$V\mathbf{A}(V).$$

Читается данное выражение следующим образом: «множество V, заданное на универсуме **U**, такое что $\mathbf{A}(V)$».

Пусть **U** – класс натуральных чисел. Тогда универсалия $V(2 \in V)$ есть понятие обо всех тех множествах натуральных чисел, элементом которых является число 2. В объем – $\mathrm{W}V(2 \in V)$ – данного понятия войдут следующие множества: $\{2\}$ – одноэлементное множество, содержащее только число 2; всевозможные двухэлементные множества, один из элементов которых – число 2, а другой элемент – любое другое натуральное число; множество всех натуральных чисел и т. д.

Пусть **U** – класс людей, по которому пробегает переменная x и на котором заданы множества V. Тогда выражение $V\forall x(x \in V \supset$ Человек(x)) есть понятие о всех подмножествах, которые содержатся в множестве людей. В объем этого понятия войдут такие множества, как «множество учащихся», «множество преподавателей», «множество русских» и т. д.

При тех же условиях рассмотрим универсалию $V_1(V_1 = \mathrm{W}V_2\forall x(x \in V_2 \supset$ Человек(x))). Она задает понятие, в объем которого войдет ровно одно множество, а именно: множество всех тех множеств, которые содержатся в классе людей, т. е. единственным элементом объема этого понятия будет в точности то множество, которое являлось объемом предыдущего понятия.

Пусть переменная V пробегает по множествам книг. Тогда универсалия вида $V\exists z$(Помещение(z) & Хранится в (V, z)) является понятием библиотеки, а выражение вида $V\exists z$(Помещение(z) & Хранится в (V, z) & $\forall x$(Человек(x) $\supset$ Может пользоваться (x, V))) является понятием публичной библиотеки.

В логике принято понятия, которые были только что рассмотрены, группировать в особые классы и тем самым выделять по *типам обобщаемых предметов* еще некоторые их виды, а именно: понятия делят на *конкретные* и *абстрактные*, *собирательные* и *несобирательные*.

К числу *собирательных* относятся понятия о множествах индивидов. Все остальные же понятия считают *несобирательными*.

В случаях, когда собирательные понятия выражаются на естественном языке, их формулировка всегда начинается с так называемых собирательных слов. К их числу в русском языке относятся следующие термины – множество, класс, совокупность, собрание, многообразие, геометрическое место точек, стая, шайка, ансамбль и многие другие. Примеры собирательных понятий были только что приведены.

***Конкретными* считаются понятия, элементами объема которых являются индивиды, n-ки индивидов или множества индивидов.**

К *абстрактным* понятиям относятся понятия о признаках или функциональных характеристиках индивидов.

Здесь следует особо оговорить, что к конкретным понятиям относятся любые понятия об индивидах, даже если элементами их объема являются абстрактные предметы, как, например, числа. Важно лишь одно – рассматриваем ли мы числа как индивиды. В принципе же имеются и другие трактовки чисел.

§3. Булевы операции над понятиями и отношения между понятиями

В математике исследуются различные операции, выполняемые над числами: их можно, например, складывать, делить, вычитать, умножать, возводить в некоторую степень, извлекать корни и т. д. Точно так же и в логике исследуются различного рода операции над высказываниями, понятиями и теориями. Причем, операции над понятиями бывают двух видов – операции с объемами понятий и операции с их содержаниями. Эти два типа операций, как будет показано далее, являются взаимосвязанными.

Операции, к описанию которых мы приступаем, называются *булевыми операциями* – по имени английского логика Дж. Буля, построившего особую алгебру логики, получившую в его честь название *булевой алгебры*. Рассмотрим некоторые булевы операции.

Допустим, что даны понятия $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ и $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$. Допустим также, что род у этих понятий является одним и тем же. Рассмотрим объемы данных понятий – $\mathrm{W}\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ и $\mathrm{W}\alpha\mathbf{B}(\alpha)$. С этими объемами можно осуществить следующие действия: их можно *пересечь* (эта операция обозначается знаком «$\cap$»), *объединить* (эта операция обозначается знаком «$\cup$»), *вычесть* один объем понятия из другого (эта операция обозначается знаком «\\»), осуществить операцию *симметрической разности* (она обозначается знаком «$\underline{\cup}$»), а также осуществить операцию, которая называется «*взятие дополнения*» (эта операция обозначается штрихом «'»). Продемонстрируем теперь, что означают данные операции на конкретном примере двух понятий – «$\boldsymbol{x}$Учащийся($\boldsymbol{x}$)» и «$\boldsymbol{x}$Спортсмен($\boldsymbol{x}$)», у которых общим родом является класс людей.

Пересечь **объемы понятий $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ и $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$ – это значит образовать объем нового понятия, элементами которого будут те и только те предметы α, для которых верно $\mathbf{A}(\alpha)$ и $\mathbf{B}(\alpha)$, т. е.**

$$\mathrm{W}\alpha\mathbf{A}(\alpha) \cap \mathrm{W}\alpha\mathbf{B}(\alpha) =_{\mathrm{Df}} \mathrm{W}\alpha(\mathbf{A}(\alpha) \mathbin{\&} \mathbf{B}(\alpha)).$$

Результат пересечения $\mathrm{W}\boldsymbol{x}$Учащийся($\boldsymbol{x}$) и $\mathrm{W}\boldsymbol{x}$Спортсмен($\boldsymbol{x}$), которые для краткости обозначим через **A** и **B**, будет затененной частью на Рис. 3.

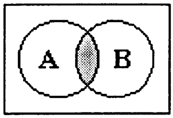


Рис. 3

Элементами в затененном множестве как раз и будут те и только те предметы, для которых общим признаком является «быть учащимся и спортсменом», т. е. это будет объем W*x*(Учащийся(*x*) & Спортсмен(*x*)).

Объединить **объемы понятий αA(α) и αB(α) – это значит образовать объем нового понятия, элементами которого будут те и только те предметы α, которые обладают по крайней мере одним из признаков A(α) или B(α), т. е.**

$$W\alpha\mathbf{A}(\alpha) \cup W\alpha\mathbf{B}(\alpha). =_{Df} W\alpha(\mathbf{A}(\alpha) \vee \mathbf{B}(\alpha)).$$

Для нашего примера с объемами W*x*Учащийся(*x*) и W*x*Спортсмен(*x*) результат их объединения представлен затененной частью на Рис. 4.

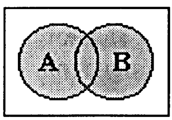


Рис. 4

Действительно, каждый элемент, входящий в затененное множество, обладает признаком «быть учащимся или спортсменом», т. е. затененная часть – это объем W*x*(Учащийся(*x*) ∨ Спортсмен (*x*)).

Вычитанием **объема понятия αB(α) из объема понятия αA(α) будет объем понятия, элементами которого являются те и только те предметы α универсума, которые обладают признаком A(α) и не обладают признаком B(α), т. е.**

$$W\alpha\mathbf{A}(\alpha)\backslash W\alpha\mathbf{B}(\alpha) =_{Df} W\alpha(\mathbf{A}(\alpha)\ \&\ \neg\mathbf{B}(\alpha)).$$

В нашем примере при вычитании W*x*Спортсмен(*x*) из W*x*Учащийся(*x*) образуется объем, элементами которого будут такие учащиеся, которые не являются спортсменами. На Рис. 5 этот объем затенен.

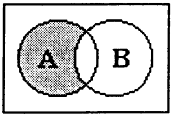


Рис. 5

Симметрической разностью **объемов понятий αA(α) и αB(α) называется объем нового понятия, элементами которого будут те и только те предметы α, которые обладают не более чем одним из признаков A(α) или B(α), т. е.**

$$W\alpha\mathbf{A}(\alpha) \veebar W\alpha\mathbf{B}(\alpha). =_{Df} W\alpha(\mathbf{A}(\alpha) \veebar \mathbf{B}(\alpha)).$$

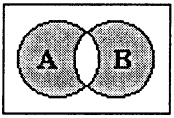


Рис. 6

Для нашего примера это означает, что каждый предмет, входящий в затененную область, будет обладать сложным свойством «быть учащимся и не спортсменом, или же быть спортсменом и не учащимся».

Рассмотренные операции являются двухместными (бинарными), так как применяются к парам понятий. Следующая же операция является одноместной (унарной) – она применяется к отдельно взятым объемам понятий, заданным на некотором универсуме.

Взять дополнение **объема понятия αA(α) в некотором универсуме U – это значит образовать в U объем нового понятия, элементами которого будут те и только те предметы α, которые не обладают признаком A(α), т. е.**

$$W\alpha\mathbf{A}(\alpha)' =_{Df} W\alpha\neg\mathbf{A}(\alpha) \text{ (т. е. } \mathbf{U}\backslash W\alpha\mathbf{A}(\alpha)).$$

Дополнение к объему W*x*Учащийся(*x*) есть объем W*x*¬Учащийся(*x*), который на Рис. 7 представлен затененной частью.

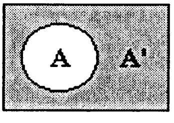


Рис. 7

Из приведенных определений видно, что существует прямая взаимосвязь между операциями над объемами понятий – «$\cap$», «$\cup$», «'», «$\underline{\cup}$» и операциями над их содержаниями – «&», «$\vee$», «$\neg$» и «$\underline{\vee}$», а именно: объемной операции пересечения «$\cap$» соответствует операция над содержанием «&», объемной операции объединения «$\cup$» соответствует операция над содержанием «$\vee$», объемной операции симметрической разности «$\underline{\cup}$» соответствует содержательная операция «$\underline{\vee}$», а взятию дополнения «'» соответствует операция отрицания «$\neg$». Кроме того, легко показать, что объемной операции теоретико-множественной разности «\» соответствует содержательная операция – антиимпликация ($\not\supset$). Поэтому оперировать можно не только с объемами понятий, но и с их содержаниями. Так, если имеются два признака $\mathbf{A}(\alpha)$ и $\mathbf{B}(\alpha)$, составляющих содержание понятий $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ и $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$, и они соединяются конъюнктивно в признак $\mathbf{A}(\alpha)$ & $\mathbf{B}(\alpha)$, то тем самым создается видовое отличие для понятия $\alpha(\mathbf{A}(\alpha)$ & $\mathbf{B}(\alpha))$, объем которого является пересечением объемов понятий $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ и $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$.

Операции над понятиями – это некоторые действия с ними. Но между понятиями существуют и определенные объективные, независимые от нашей воли и наших желаний *отношения*. Тот факт, что какие-то два понятия находятся друг к другу в некотором отношении, можно установить как по их объемным, так и по содержательным характеристикам.

Будем говорить, что понятия $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ и $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$ *несравнимы*, если в первом понятии $\alpha \in \mathbf{U}_1$, во втором понятии $\alpha \in \mathbf{U}_2$ и $\mathbf{U}_1 \neq \mathbf{U}_2$, т. е. если род первого понятия отличен от рода второго понятия.

Например, при обычной формулировке понятий, *несравнимыми* будут понятия человека и натурального числа, понятия формулы и небесного тела, понятия мысли и административного здания. У каждого из этих понятий имеется свой собственный род, отличный от рода другого понятия.

Два понятия $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ и $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$ считаются *сравнимыми*, если и только если совпадают их роды, т. е. $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2$.

Среди всевозможных пар сравнимых понятий прежде всего выделим те, которые находятся в трех *фундаментальных* разновидностях этого отношения. Последние считаются фундаментальными в том смысле, что с помощью различных их комбинаций можно задать все другие виды отношений. К числу фундаментальных отношений принадлежат отношения *совместимости*, *включения* и *исчерпывания.*

Два понятия αA(α) и αB(α) считаются *совместимыми*, если и только если пересечение их объемов непусто, т. е.

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \neq \varnothing.$$

Это означает, что в универсуме имеется по крайней мере один элемент, обладающий как признаком **A**, так и признаком **B**, т. е. $\exists\alpha(\mathbf{A}(\alpha)\ \&\ \mathbf{B}(\alpha))$. Ясно, что если условие совместимости $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ и $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$ не выполнено, т. е. $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \varnothing$, то такие понятия следует считать находящимися в отношении *несовместимости.* В этом случае в универсуме отсутствуют элементы с признаком $\mathbf{A}(\alpha)\ \&\ \mathbf{B}(\alpha)$, т. е. $\neg\exists\alpha(\mathbf{A}(\alpha)\ \&\ \mathbf{B}(\alpha))$.

Понятие αA(α) ***включается в понятие*** αB(α), **если и только если для каждого α, для которого верно A(α), будет верно и B(α), т. е.**

$$\forall\alpha(\mathbf{A}(\alpha) \supset \mathbf{B}(\alpha)).$$

Наличие такого отношения между объемами **A** и **B** обозначается посредством записи $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$.

Отношение включения может иметь место и в обратную сторону – когда понятие $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$ включается в понятие $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$. В этом случае для каждого α, для которого верно $\mathbf{B}(\alpha)$, будет верно и $\mathbf{A}(\alpha)$, т. е.

$$\forall\alpha(\mathbf{B}(\alpha) \supset \mathbf{A}(\alpha)).$$

Наличие этого отношения между объемами понятий обозначается посредством записи $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$.

Два понятия αA(α) и αB(α) находятся в отношении *исчерпывания*, если и только если для их объемов справедливо утверждение: $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbf{U}$.

Это означает, что каждый предмет из универсума **U** является элементом или объема первого, или объема второго понятия – $\forall\alpha(\mathbf{A}(\alpha) \vee \mathbf{B}(\alpha))$. Если данное условие не выполняется для объемов некоторых понятий $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ и $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$, то такие понятия называются находящимися в отношении *неисчерпывания*.

Учитывая теперь различные комбинации фундаментальных отношений, которые возможны для некоторых двух конкретных понятий $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ и $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$ (их совместимость, включенность одного в другое и исчерпываемость), можно установить для них различные производные (нефундаментальные) отношения. Каждое из этих отношений задается некоторой *модельной схемой*. Всего таких модельных схем 15. Если же ограничиться рассмотрением только непустых и неуниверсальных понятий, то для них можно установить ровно 7 различных отношений. Для последних существуют хорошие их представления с помощью так называемых *кругов Эйлера* (см. Рис. 8).

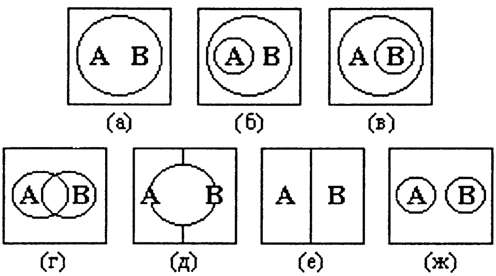


Рис. 8

На схеме (а) представлено отношение *равнообъемности* между понятиями $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ и $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$. Оно определяется следующими фундаментальными условиями: понятия $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ и $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$ совместимы, первое понятие по объему включается во второе – $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, второе понятие по объему включается в первое – $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$ и, кроме того, понятия находятся в отношении неисчерпывания. Отношение равнообъемности принято выражать записью $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. В этом отношении находятся, например, понятия «жвачное животное» и «парнокопытное животное», так как их объемы полностью совпадают.

На схеме (б) графически представлено отношение *подчинения понятия* $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ понятию $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$. Оно определяется посредством следующих фундаментальных условий: понятия совместимы, первое понятие включается по объему во второе – $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, но неверно, что второе понятие включается в первое, и понятия находятся в отношении неисчерпывания. Наличие такого объемного отношения принято выражать посредством записи $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$. При этом понятие $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ называется *видовым*, а понятие $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$ – *родовым*. В этом отношении находятся, например, понятия учащегося и человека, понятия планеты и небесного тела, если с $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ соотнесены, соответственно, первые из них, а с $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$ – вторые.

На схеме (в) также представлено отношение подчинения, но подчинение обратное, а именно *подчинение* $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$ *понятию* $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$. Отличие от предыдущего отношения состоит лишь в том, что здесь понятие $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$ включается по объему в понятие $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$, и неверно, что имеет место обратное включение. Естественно, это объемное отношение выражается посредством записи $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$. В этом случае понятие $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$ является видовым, а $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ – родовым. В качестве примеров такого рода отношения могут быть взяты предыдущие понятия, но с $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$ необходимо теперь соотнести, соответственно, первые из них, а с $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ – вторые.

На схеме (г) показано отношение *пересечения*. В этом случае понятия $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ и $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$ совместимы, отсутствуют включения по объему первого понятия во второе, а также второго понятия в первое, и понятия находятся в отношении неисчерпывания. В таком отношении находятся, например, понятия учащегося и спортсмена на множестве (универсуме) людей.

На схеме (д) представлено отношение *дополнительности*. Оно определяется такими фундаментальными условиями: понятия $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ и $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$ совместимы, находятся в отношении исчерпывания, но не включаются по объему друг в друга. В этом отношении находятся, например, понятия «число, меньшее ста» и «число, большее восьмидесяти» на универсуме натуральных чисел.

На схеме (е) показано отношение *противоречия* между $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ и $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$. В этом случае понятия являются несовместимыми, находятся в отношении исчерпывания, и отсутствует включение по объему первого понятия во второе и второго в первое. В этом отношении, в частности, находятся любые два понятия с видовыми отличиями $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ и $\alpha\neg\mathbf{A}(\alpha)$, например, понятия «учащийся» и «не учащийся», «преподаватель» и «не преподаватель» и т. д.

На последней схеме (ж) графически задано отношение *соподчинения*. Оно определяется условиями: понятия $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ и $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$ несовместимы и не исчерпывают универсум, и, кроме того, оба понятия не включаются по объему друг в друга. Такое отношение свойственно, например, понятиям кометы и звезды на множестве небесных тел.

Выше говорилось, что имеется взаимосвязь между объемными характеристиками понятий и их содержательными характеристиками. Одно из важнейших проявлений такой взаимосвязи – так называемый *закон обратного отношения между объемами и содержаниями понятий*. Словесная формулировка этого закона звучит так:

> **Объем понятия $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ составляет часть объема понятия $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$, если и только если содержание $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$ является частью содержания $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$.**

Так, объем понятия «планета» составляет часть объема понятия «небесное тело», но в таком случае из информации о том, что некий объект x является планетой, можно извлечь информацию, что x является и небесным телом. Заключить в обратную сторону нельзя, так как если x – небесное тело, то это вовсе не означает, что x – планета: ведь x в таком случае мог бы быть и кометой, и астероидом, и звездой, и чем-то еще. Таким образом, информативность выражения «x – планета» больше, чем информативность выражения «x – небесное тело», т. е. содержание понятия «небесное тело» составляет часть содержания понятия «планета».

Сделаем важное замечание. Выражения $\vdash \forall\alpha(\mathbf{A}(\alpha) \supset \mathbf{B}(\alpha))$ и $\nvdash \forall\alpha(\mathbf{B}(\alpha) \supset \mathbf{A}(\alpha))$, которые могут трактоваться как утверждения, что содержание понятия $\alpha\mathbf{A}$(a) больше, чем содержание понятия $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$, является истинным на некотором универсуме $\mathbf{U}$. Но установить такую истинность можно, только если на $\mathbf{U}$ заданы значения всех дескриптивных терминов, входящих в соответствующие универсалии, и установлены какие-то закономерные отношения между этими значениями. Иначе говоря, установить истинность указанного выражения можно лишь при наличии некоторого дополнительного знания, описывающего нашу область предметов $\mathbf{U}$. Обычно это осуществляется с помощью некоторой совокупности утверждений, истинных относительно предметной области $\mathbf{U}$. Совокупность эта называется теорией $\mathbf{T}$. Учитывая данное обстоятельство, теперь можно более точно сформулировать закон обратного отношения:

$$W\alpha\mathbf{A}(\alpha) \subset W\alpha\mathbf{B}(\alpha), \textbf{ если и только если } \mathbf{T} \vdash \forall\alpha(\mathbf{A}(\alpha) \supset \mathbf{B}(\alpha)) \textbf{ и } \mathbf{T} \nvdash \forall\alpha(\mathbf{B}(\alpha) \supset \mathbf{A}(\alpha)),$$

где левая часть записи говорит о том, что класс реально существующих предметов, образующих объем понятия $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$, составляет часть объема $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$, а правая часть записи означает, что утверждение о соответствующем отношении содержаний данных понятий имет место в теории **T**.

Последняя формулировка показывает, что вопрос о наличии отношения включения между объемами понятий может быть сведен к вопросу о выводимости в теории **T** некоторого предложения, т. е. присущность двум понятиям данного отношения можно установить с помощью логики предикатов. Это же верно и для других фундаментальных отношений. Действительно, вопрос о наличии у понятий $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ и $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$ отношения совместимости между их содержаниями сводится к построению в исчислении предикатов относительно соответствующей теории **T** вывода вида:

$$\mathbf{T} \vdash \exists\alpha(\mathbf{A}(\alpha) \,\&\, \mathbf{B}(\alpha)),$$

а вопрос о наличии у них отношения исчерпывания сводится к построению в исчислении предикатов вывода:

$$\mathbf{T} \vdash \forall\alpha(\mathbf{A}(\alpha) \vee \mathbf{B}(\alpha)).$$

Но так как через данные фундаментальные отношения определяются отношения всех других типов, то отсюда следует, что наличие всех указанных выше отношений может быть установлено посредством применения логики предикатов.

§4. Операции ограничения, обобщения и деления понятий

Кроме булевых операций, над понятиями можно осуществлять и еще целый ряд операций. Одной из них является операция *ограничения понятий.*

Ограничить понятие $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$ **– это значит указать понятие** $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$**, такое что для объемов A и B будет справедливо отношение** $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$**.**

Операция ограничения $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$, таким образом, состоит в переходе к *видовому* понятию $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$. Само $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$ при этом считается *родовым*. Например, пусть на множестве людей задано понятие «писатель». Тогда переход к понятию «русский писатель» является процедурой ограничения. Понятие «русский писатель» является видовым по отношению к понятию «писатель», которое трактуется как родовое.

Процесс ограничения можно продолжить, образовав с этой целью понятие $\alpha\mathbf{C}(\alpha)$, которое является видовым по отношению к понятию «русский писатель». Пусть $\alpha\mathbf{C}(\alpha)$ есть понятие «русский писатель начала XIX в.». Над последним понятием можно, в свою очередь, произвести операцию ограничения. В результате такой процедуры возникает система подчиненных друг другу понятий (см. Рис. 9).

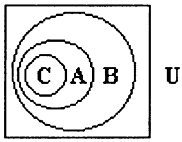


Рис. 9

Для непустых понятий пределом их ограничения считается единичное понятие. Действительно, так как ограничение понятия состоит в разбиении его объема на две непустые части, одна из которых и рассматривается как объем видового понятия, то ясно, что единичное понятие уже нельзя далее разбить указанным способом.

Для решения вопроса о нахождении для понятия $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$ ограничивающего его видового понятия можно использовать аппарат исчисления предикатов. В самом деле, если в рамках некоторой теории $\mathbf{T}$ удается построить два вывода:

$$\mathbf{T} \vdash \forall\alpha(\mathbf{A}(\alpha) \supset \mathbf{B}(\alpha)) \quad \text{и} \quad \mathbf{T} \vdash \exists\alpha(\mathbf{B}(\alpha) \mathbin{\&} \neg\mathbf{A}(\alpha)),$$

то понятие $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ как раз и будет искомым видовым понятием. Первый вывод обосновывает утверждение $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, а второй – $\neg(\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A})$. Отношение же подчинения понятия $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ понятию $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$ было определено как удовлетворяющее условию $(\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}) \mathbin{\&} \neg(\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A})$.

Операцию ограничения объема понятия нельзя путать с *операцией членения предмета* (*мереологическое ограничение*). Первая является действием с понятиями, т. е. с мыслительными конструкциями, вторая же осуществляется с элементами понятий, т. е. с самими предметами. Например, понятие «здание» можно последовательно ограничивать до понятий «административное здание», «административное здание, расположенное в Москве» и т. д., в то время как мереологическое ограничение самих зданий (элементов понятия «здание») будет состоять в выделении различных его частей: крыши, стен, окон, дверей и т. п. С логической точки зрения, различие между двумя этими процедурами состоит в том, что при правильном ограничении понятия $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$ до понятия $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ должно оказаться истинным предложение «Всякий **A** есть **B**», в то время как при мереологическом ограничении предмета **B** до предмета **A** предложение указанного вида будет ложным. В самом деле, истинным является предложение «Всякое административное здание есть здание», но ложным будет предложение «Всякое окно есть здание».

Осуществить операцию *обобщения понятия* $\alpha\mathbf{A}(\alpha)$ – это значит указать понятие $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$ такое, что будет верно отношение $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$.

Процедура обобщения, таким образом, состоит в переходе от видового понятия к родовому.

Пусть на множестве людей задано понятие «поэт». Тогда переход к понятию «писатель» является процедурой обобщения исходного понятия. Последнее понятие можно обобщить далее до понятия, скажем, «интеллигент». В результате последовательного выполнения этой процедуры возникает система подчиненных друг другу понятий (см. Рис. 10).

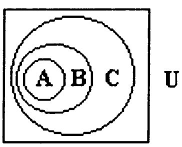


Рис. 10

Пределом обобщения является универсальное понятие, т. е. некоторое понятие $\alpha\mathbf{D}(\alpha)$ такое, что $\mathrm{Wa}\mathbf{D}(\alpha) = \mathbf{U}$.

Еще одной операцией является операция *деления понятий.*

Под *делением* непустого понятия $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$ понимают построение системы понятий $\mathbf{S} = \{\alpha\mathbf{A}_1(\alpha), \alpha\mathbf{A}_2(\alpha),.., \alpha\mathbf{A}_n(\alpha)\}$ на основании какой-либо характеристики Ψ элементов этого понятия.

При осуществлении операции деления используется следующая терминология: $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$ называется *делимым понятием*; понятия, входящие в систему **S**, называются *членами деления*; а характеристика Ψ – *основанием деления.*

***Деление считается правильным*, если:**

1) **Деление осуществляется по одному основанию, т. е. в качестве Ψ используется в точности одна (простая или сложная) характеристика предметов;**
2) $\forall i(W\alpha\mathbf{A}_i(\alpha) \subset W\alpha\mathbf{B}(\alpha))$ – **члены деления, входящие в S, являются видами по отношению к понятию $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$;**
3) $\forall i(W\alpha\mathbf{A}_i(\alpha) \neq \varnothing)$ – **члены деления не пусты;**
4) $\forall_i\forall_j(\mathbf{i} \neq \mathbf{j} \supset W\alpha\mathbf{A}_i(\alpha) \cap W\alpha\mathbf{A}_j(\alpha) = \varnothing)$ – **члены деления попарно несовместимы;**
5) $W\alpha\mathbf{A}_1(\alpha) \cup W\alpha\mathbf{A}_2(\alpha) \cup ... \cup W\alpha\mathbf{A}_n(\alpha) = W\alpha\mathbf{B}(\alpha)$ – **объединение объемов всех членов деления из S совпадает с объемом $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$.**

Таким образом, всякое правильное деление разбивает объем исходного родового понятия $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$ на непересекающиеся объемы не пустых видовых понятий $\alpha\mathbf{A}_i(\alpha)$, причем оно делает это так, что в сумме они исчерпывают весь объем родового понятия: вне возникшей видовой системы не должно оказаться ни одного элемента из объема $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$.

В зависимости от того, что берется в качестве основания деления, различают два их вида – *дихотомическое деление и деление по видоизменению основания.*

В случае дихотомического деления родового понятия $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$ основанием деления является некоторый *признак*, присущий лишь части предметов, входящих в объем $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$. Деление осуществляется по наличию или отсутствию этого признака у предметов делимого понятия. Например, понятие «человек» дихотомически делится, если взять в качестве основания деления признак «быть мужчиной», ровно на два класса, соответствующих понятиям xМужчина(x) и $x\neg$Мужчина(x). Это же понятие, но уже по другому основанию может быть разбито на виды xУчащийся(x) и $x\neg$Учащийся(x). В объем одного понятия войдут учащиеся, а в объем другого – все другие люди.

Графически дихотомическое деление представляют в виде дерева с двумя ветвями (см. Схему 1).

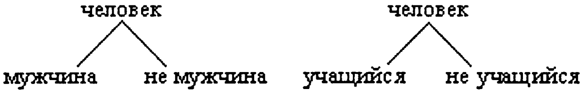


Схема 1

Другой вид деления – это деление *по видоизменению основания*. В этом случае в качестве основания деления используются *предметно-функциональные* характеристики элементов объема делимого понятия. Необходимо только (для выполнения условий деления) следить, чтобы предметная функция **f**, берущаяся в качестве основания, была всюду определена на множестве $W\alpha\mathbf{B}(\alpha)$. При таком делении объемы видовых понятий представляют собой собрания тех и только тех предметов v_1 и v_2, для которых выполняется условие $\mathbf{f}(v_1) = \mathbf{f}(v_2)$.

Примером деления по видоизменению основания является деление понятия «человек» по цвету глаз. Цвет глаз – это одноместная предметно-функциональная характеристика каждого человека. Значением этой функции будет множество цветов {голубой, серый, коричневый,...}. Применяя эту функцию к отдельным людям, будем получать выражения вида «цвет глаз(Ивана) = голубой», «цвет глаз(Петра) = зеленый» и т. д. В один класс теперь соберутся все люди, обладающие одним и тем же цветом глаз, например голубым. Тем самым порождается множество голубоглазых людей. Аналогично образуется множество сероглазых людей и т. д. Эти классы и являются объемами членов деления.

Если выбрать в качестве основания деления другую предметно-функциональную характеристику, присущую каждому человеку, то можно осуществить другое деление этого же понятия. Например, понятие человека можно указанным способом разделить по этнической принадлежности, росту и т. д.

Всякое правильное деление должно удовлетворять требованиям, указанным в определении. Невыполнение какого-либо из этих требований приводит к неправильному делению. Так, невыполнение требования – деление должно осуществлять по одному основанию – ведет к *ошибке в делении* (*путаное деление*). Другой распространенной ошибкой является так называемый *скачок в делении*, состоящий в том, что в системе **S** одни члены деления являются видами $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$, а другие – его подвидами. Например, выше указывалось, что понятие человека может быть по отношению к процессу обучения дихотомически поделено на понятия «учащийся» и «неучащийся». В свою очередь понятие учащегося по другому основанию – характеру обучения – может быть поделено на подвиды «учащийся в системе начального образования», «учащийся в системе среднего образования» и «учащийся в системе высшего образования». Совмещая эти два деления в одном, т. е. осуществляя ошибочное деление сразу по двум основаниям, можно получить, например, систему понятий **S** = {«неучащийся», «учащийся в системе начального образования», «учащийся в системе среднего образования» и «учащийся в системе высшего образования»}, в которой понятие неучащегося является видовым, а все остальные понятия подвидовыми, так как для них ближайшим их родом является понятие учащегося, которое ошибочно не указано. Данное деление неправильно, так как оно осуществлено не по одному основанию и ведет к *скачку в делении*, т. е. исходное понятие делится не на *ближайшие* видовые понятия.

Операцию деления, наподобие того, как это было с ограничением понятий, иногда путают с операцией *мереологического членения* предмета, т. е. вместо перечисления видовых понятий перечисляют части предмета. Ошибка устанавливается с помощью того же критерия, что и в случае с ограничением понятия. Для каждого видового понятия $\alpha\mathbf{A}_i(\alpha)$ должно быть истинным высказывание «Всякий $\mathbf{A}_i$ есть **B**», в то время как ни для одного понятия о частях данное предложение не будет истинным.

Любое мереологическое членение можно превратить в правильное деление некоторого понятия – так называемое *мереологическое деление* (деление на части). Для этого достаточно вместо понятия $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$, которое ошибочно делилось на части предмета, взять понятие «α часть $\mathbf{B}(\alpha)$», т. е. «α такое, что α есть часть **B**». Например, выше такой предмет, как здание, членился на свои части: окна, двери, стены и т. д. Если теперь образовать понятие «часть здания», то тогда то, что раньше – окна, двери, стены и т. д. – не были видами понятия «здание», становятся теперь видами, но видами понятия «часть здания».

Требование, чтобы всякое правильное деление проводилось по одному основанию, вовсе не предполагает, что в качестве такого основания в обязательном порядке должен выступать некоторый простой признак. В качестве основания деления может использоваться и сложный признак. Важно лишь одно – чтобы этот признак был один. Например, класс людей можно разбить по одному, но сложному основанию, в качестве которого выступает признак «быть мужчиной и студентом». В этом случае возникает правильное дихотомическое деление, образующее следующую систему видовых понятий (см. Схему 2).

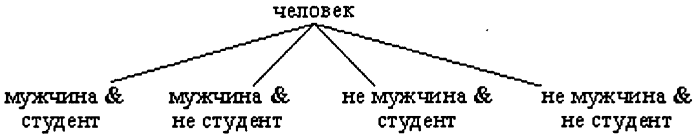


Схема 2

Операция деления лежит в основе построения различного рода *классификаций.*

Под *классификацией* понимается результат последовательного деления некоторого понятия на его виды, видов на подвиды и т. д.

Классификации играют большую роль в научном познании и практической деятельности людей. Обычно исследование любой совокупности объектов всегда завершается построением их классификации. Это позволяет правильно ориентироваться в окружающем мире, принимать верные решения и осуществлять эффективные (ведущие к достижению нужных целей) действия.

Любая классификация может быть представлена в форме дерева понятий (см. Схему 3). Дерево классификации выглядит как множество точек (*вершин*), соединенных линиями (*ребрами*). Каждая вершина представляет некоторое понятие, которое называют *таксоном* (таксономической единицей). Ребра же показывают, на какие подвиды разбиваются данные таксоны.

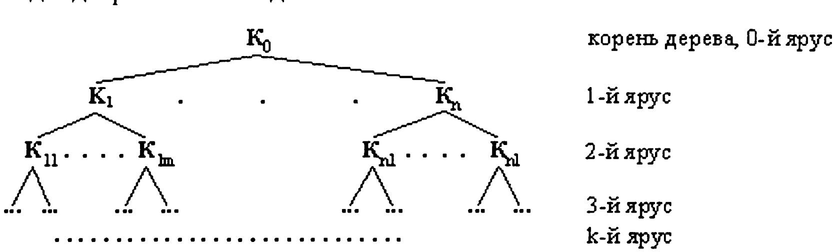


Схема 3

Вершина $\mathbf{K}_0$ называется *корнем дерева*. Она репрезентирует (представляет) исходное делимое понятие. Таксоны группируются по *ярусам*. В каждом ярусе собраны таксоны, полученные в результате одинакового числа применений операций деления к исходному понятию. Те таксоны, которые в данной классификации уже далее не делятся на свои виды, называются *концевыми таксонами*. *Предельной классификацией* является такая классификация, все концевые таксоны которой представляют собой единичные понятия. Однако в зависимости от целей, которые преследуются при построении классификации, концевые таксоны могут и не быть единичными понятиями.

При построении классификации могут использоваться обе разновидности деления – *дихотомическое* и *по видоизменению основания*. Причем, каждый акт деления, который применяется при построении классификации, может осуществляться по своему собственному основанию, отличному от оснований, которые использовались в других актах деления.

Примером *дихотомической классификации* может служить так называемое *древо Порфирия*. В этой классификации Порфирий (греческий философ II в. н. э.) классифицирует философское понятие субстанции (предмета) (см. Схему 4).

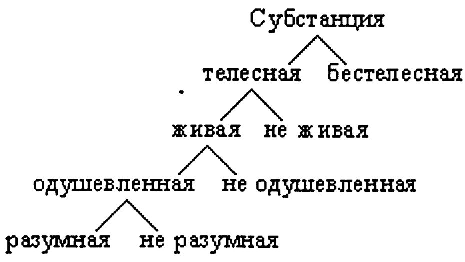


Схема 4

Примером классификации *по видоизменению основания* является классификация биологических организмов. Возникающие при этом члены деления распределяются по ярусам, получая в каждом ярусе специальные названия. Так, все организмы делятся первоначально на множества, называемые царствами – царство животных и царство растений (мы представляем здесь не современную классификацию). Эти два множества образуют 1-й ярус – ярус царств. В свою очередь царства делятся на типы, типы на классы, классы на отряды, отряды на семейства, семейства на роды, роды на виды. Последние делятся на разновидности, а разновидности на расы и т. д.

Однако реальная научная практика классификаций оказывается настолько сложным процессом, что часто приходится прибегать к специальным приемам, чтобы общая абстрактная схема данной операции была выполнена. Например, в реальной классификации часто встречаются случаи, когда некоторые предметы не удается поместить ни в один из существующих таксонов. Для того чтобы общая схема классификации, тем не менее, соблюдалась, для таких предметов создается либо особый таксон (при этом часто возникает проблема, в какой ярус поместить данный таксон), либо такие предметы помещают в так называемый *отстойник*. В последнем содержатся все объекты, место которых в системе классификации на данный момент не установлено. Кроме того, следует иметь в виду, что в реальной практике классификационной систематики существующая на нынешний день классификация объектов зачастую не является окончательной – она постоянно изменяется и трансформируется в соответствии с новыми научными данными, а потому объект, первоначально помещенный в некоторый таксон, может по мере получения новых данных изменить свое место в классификации.

Различают еще два вида классификаций – *искусственные* и *естественные*. Они различаются по характеру оснований, которые используются в операциях деления. Если в качестве оснований делений берутся *существенные* характеристики предметов, то классификация считается естественной, если же в качестве оснований берутся *несущественные*, т. е. случайные характеристики предметов, то классификация относится к искусственной.

Обычно к числу существенных относят те характеристики предметов, которые являются их теоретическими характеристиками, т. е. используются при теоретическом описании той предметной области, элементом которой является данный предмет. С этой целью из огромного числа различных свойств, отношений, предметно-функциональных характеристик, присущих предметам, стараются выбрать такие, с помощью которых можно осуществить процедуру дедуцирования как можно большего числа других свойств, отношений, предметно-функциональных характеристик.

Существенные характеристики предмета как бы лежат в основе всех других характеристик и составляют его *сущность*. Знание того, что предмет обладает данными характеристиками, позволяет получить очень богатую и разнообразную дополнительную информацию о нем. Так, наличие у человека способности к созданию орудий труда, прямохождение и членораздельная речь являются существенными его признаками, так как позволяют при теоретическом описании человека развернуть стройное учение о нем и его бытии. В противоположность этому такой признак, как наличие у человека мягкой мочки уха, не является существенным. Зная эту особенность, присущую людям, ничего важного и нового из этого нашего знания получить нельзя.

Из сказанного вовсе не следует делать вывод, что искусственные классификации не представляют никакого интереса. Напротив, они часто выполняют важные практические задачи, и без них наша жизнь была бы затруднена. Например, алфавитный библиотечный каталог является искусственной классификацией книг библиотеки, так как знание того, что книгу, которую я ищу, написал автор с фамилией Иванов, ничего еще не говорит о содержании этой работы. Однако использование алфавитного каталога позволяет быстро найти нужное произведение.

С другой стороны, основная особенность естественных классификаций как раз и состоит в том, что, зная местоположение некоторого предмета в данной классификации, нам удается сразу же получить большое число других сведений о нем. Например, естественная классификация химических элементов, предложенная Д. И. Менделеевым (таблица Менделеева), позволяет по одному только местоположению того или иного элемента в таблице установить огромное число его свойств, предсказать поведение элемента в самых различных химических реакциях. То же самое характерно и для современной классификации биологических организмов.

ГЛАВА VII

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

§1. Теоретико-познавательные характеристики определений

В предыдущей главе говорилось, что в повседневной разговорной практике словарный запас языка обычно используется на интуитивном уровне. У каждого человека эта интуиция складывается стихийно в ходе овладения языком. Было отмечено также, что подобная ситуация в силу наличия у разных людей различной интуиции может вести к взаимному недопониманию и даже недоразумениям. Поэтому имеется насущная потребность в уточнении значений терминов. Но осуществить такое уточнение языковыми средствами можно лишь одним способом – указав смысл, в котором следует понимать данный термин. Именно эту функцию и выполняют определения.

Русский термин «определение», как и латинский его эквивалент – «*definitio*», является производным от слов «предел», «граница». В логике термин «определение» понимается следующим образом:

> ***Определение*** **(дефиниция) – это логическая процедура, состоящая в придании строго фиксированного смысла языковым выражениям (терминам языка).**

Так, ставя в соответствие математическому термину «треугольник» выражение «замкнутая геометрическая фигура, ограниченная тремя сторонами», мы придаем этому термину тот смысл, в котором он должен использоваться в математике. При этом само соответствие между термином и приданным ему смыслом достигается посредством лингвистической конструкции вида:

> «треугольник есть по дефиниции замкнутая геометрическая фигура, ограниченная тремя сторонами»,

которая и называется определением.

Так как значения языковых выражений зависят от их смыслов, то всякий раз, придавая через определение какой-либо смысл (содержание) языковому выражению, одновременно с этим невольно указывают и его значение (экстенсионал), т. е. в некотором универсуме очерчивается (определи́вается) граница того класса предметов, которые подпадут под него. Иначе говоря, каждое определение задает не только смысл термина, но и его значение, а потому будем далее полагать, что одной из основных функций определения является задание значения определяемого термина.

В языковой практике определения применяются для решения различных задач. Часто, например, встречаются ситуации, когда некоторый термин при интуитивном его употреблении разными людьми оказывается столь расплывчатым и неоднозначным, что возникают трудности с его пониманием. В таких случаях встает проблема экспликации (уточнения) смысла данного термина, что крайне важно для его нормативного использования. Эту задачу выполняют толковые и энциклопедические словари, где каждый термин посредством его определения получает некую стандартную однозначную трактовку. Например, в философии термин «понятие» употребляется на интуитивном уровне и имеет весьма туманное значение. Наше описание в предыдущей главе теории понятия имело одной из целей прояснение смысла данного термина и введение его стандартного употребления.

С другой стороны, для многих терминов (хотя они и употребляются однозначно в том смысле, что ими обозначаются вполне определенные объекты) зачастую остается неясным, по каким признакам осуществлено отличение данных предметов от всех остальных. В таком случае возникает задача указать некоторый признак, на основе которого отождествляются одни предметы, а другие – отличаются от них. Именно эта цель и стояла перед Платоном, когда он определил термин «человек» условием: «человек есть бесперое и двуногое существо».

Иногда интуитивное употребление термина в составе теории может вести к противоречиям. В этом случае задачей определения становится построение такого определения, которое бы не позволяло получать противоречия. Именно такая ситуация возникла в наивной теории множеств Г. Кантора, где полуинтуитивное употребление термина «множество» привело к возникновению парадоксов, например парадокса Рассела о множестве всех нормальных множеств.

Вообще, значение четкой и однозначной терминологии особенно велико в научных исследованиях, где вопросу об определениях уделяется самое пристальное внимание. При этом, правда, надо учитывать, что для решения различных научных задач одному и тому же термину могут ставиться в соответствие различные смыслы. Так, для решения задач, которые стояли перед Аристотелем, ему оказалось достаточным определить термин «человек» посредством выражения «политическое животное». С другой стороны, для Б. Франклина такое определение оказалось недостаточным, и он определил данный термин другим условием: «животное, способное производить орудия труда». Но и это определение человека не может удовлетворить ученого-естественника, для которого главными признаками человека являются не юридические или социальные признаки, но прежде всего признаки, характеризующие его биологическую природу.

Данный пример показывает, что для решения различных задач один и тот же термин может определяться различными способами. Вообще, не существует определений, которые были бы пригодны для решения любых познавательных проблем. Напротив, в повседневной практике смыслы терминов часто строго фиксируются только на момент ведения беседы, и не более того. И даже в сфере науки, где терминам стремятся придать устойчивые, постоянные смыслы, нередко возникают ситуации, которые требуют уточнения, переопределения уже ранее определенных терминов. Последнее является следствием постоянного развития и уточнения научного знания, в соответствии с чем трансформируются и определения научных терминов.

Всякое определение, независимо от целей и способов его введения, представляет собой простую констатацию приписывания терминам языка некоторого смысла. Например, выражение «человек есть по дефиниции политическое животное» представляет собой констатацию того, что термин «человек» будет употребляться в смысле «политическое животное».

Такого рода констатации выражают *конвенции* (*соглашения*) об употреблении терминов. Причем, конвенциональный характер определений либо задается в прямой, явной форме, либо эти конвенции носят неявный, скрытый характер. В первом случае определение очевидным образом не является предложением, а потому ему и нельзя приписывать свойства «быть истинным» или «быть ложным». Здесь можно лишь говорить, что то или иное определение является удачным или нет, достигает оно поставленных целей или нет. Во втором же случае в качестве определений используются такие формы их выражений, которые являются предложениями, а потому о них можно говорить как об истинных или ложных утверждениях. Далее (в § 4 данной главы) будет подробно объяснено, что представляют собой в этом случае соответствующие предложения и почему их можно трактовать как определения.

§2. Явные определения

Определения можно разделить на несколько видов. Наиболее существенно их подразделение на *явные* и *неявные*. Последние будут рассмотрены в следующем параграфе. Здесь же мы остановимся только на *явных определениях*.

Явными **определениями называются определения, задаваемые лингвистической конструкцией вида:**

$$\mathbf{A[t]} \leftrightarrow \mathbf{B}.$$

Каждая такая конструкция содержит четыре части: **A[t]** называется *определяемой частью*, **B** – *определяющей частью*, знак $\leftrightarrow$ указывает, что выражение **A[t]** по конвенции означает то же самое, что и выражение **B**. Кроме того, в определяемой части **A[t]** всегда присутствует некоторый термин **t**, который и служит целью построения всего определения. Этот термин называется *определяемым термином*. В явных определениях определяемым термином является та минимальная часть определяемого выражения **A[t]**, которая не встречается в определяющей части **B**.

В случаях построения конкретных явных определений вместо знака «$\leftrightarrow$» пишется либо знак «$=_{\mathrm{Df}}$» (читается: «равно по дефиниции»), либо знак «$\equiv_{\mathrm{Df}}$» (читается: «эквивалентно по дефиниции»). Первый знак употребляется в том случае, когда определяемая часть **A[t]** является именной конструкцией, а второй в том случае, когда **A[t]** – высказывательная конструкция. Выше мы уже неоднократно пользовались данными знаками.

Явные определения делятся по разным основаниям на несколько видов. Для этого могут быть использованы различные синтаксические и семантические характеристики определений.

(1) Так, в зависимости от синтаксической структуры определяемой части, т. е. в зависимости от того, к какой языковой категории относится определяемая часть **A[t]**, различают следующие виды явных определений.

а) Дефиниция называется *определением имени*, если $\mathbf{A}[\mathbf{t}]$ – это собственное имя $\mathbf{k}$ некоторого предмета. При этом $\mathbf{k}$ может быть не только именем индивида, но и именем любого другого предмета – именем свойства, отношения, множества, предметно-функциональной характеристики или чего-то еще. Вся дефиниция имеет вид выражения:

$$\mathbf{k} =_{\mathrm{Df}} \iota\alpha\mathbf{B}(\alpha),$$

и читается данная конструкция следующим образом: «$\mathbf{k}$ равно по дефиниции тому единственному α, для которого верно $\mathbf{B}(\alpha)$». Здесь встречается знак «ι». Это особый оператор, который позволяет по понятию $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$ в том случае, когда это единичное понятие с объемом $\{v\}$, построить имя этого единственного предмета v, входящего в объем понятия, – «тот самый единственный α, для которого верно $\mathbf{B}(\alpha)$».

Приведем некоторые примеры таких определений.

Выражение вида «А. С. Пушкин по определению – это автор "Евгения Онегина"» является дефиницией имени конкретного индивида – А. С. Пушкина.

Выражение вида «стоимость по дефиниции – это то общее, что есть у всех товаров» является определением имени некоторого абстрактного объекта, а именно предметно-функциональной характеристики товаров, т. е. тех предметов, которые обмениваются друг на друга на рынке.

Выражение «человечество по определению – это множество людей» определяет смысл имени некоторого множества.

Выражение «родство по определению есть такое отношение между людьми, когда у этих людей имеется общий предок» является определением имени двухместного отношения.

Выражение «пара <2, 3> по определению есть та самая пара натуральных чисел, где первое число простое и четное, а второе получено из первого присоединением 1» определяет имя этой конкретной пары чисел.

Эти определения призваны указать, в каком смысле будут употребляться данные имена. Приведем формальные записи для двух первых определений:

А. С. Пушкин $=_{\mathrm{Df}}$ ιx(Автор(x, "Евгений Онегин")),
Стоимость $=_{\mathrm{Df}}$ $\iota f \forall x \forall y$(Обмен. на рынке с$(x, y) \equiv f(x) = f(y)$).

б) Если **A**[**t**] является универсалией вида $\alpha\mathbf{\Pi}(\alpha)$, где **П** – n-местный предикатор, то дефиниция называется *определением универсалии* и записывается в форме:

$$\alpha\mathbf{\Pi}(\alpha) =_{\mathrm{Df}} \alpha\mathbf{B}(\alpha).$$

В определениях этого вида определяемая часть $\alpha\mathbf{\Pi}(\alpha)$ является языковым выражением простого понятия, причем понятия о чем угодно – об индивиде, n-ке индивидов, свойстве, отношении и т. д., а определяемая часть $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$ – языковым выражением сложного понятия. Смысл определения состоит в том, что в нем посредством $\alpha\mathbf{B}(\alpha)$ «раскрывается» содержание простого понятия. В этом случае определяемым термином **t** является n-местный предикатор **П**.

Примерами таких определений являются следующие выражения: «$\langle x, y\rangle$Дед$(x, y) =_{\mathrm{Df}} \langle x, y\rangle\exists z$(Отец$(x, z)$ & Родитель(z, y))», задающее смысл простой универсалии «пара предметов, находящихся в отношении x дед y-ка»; выражение «$\boldsymbol{P}0(\boldsymbol{P}) =_{\mathrm{Df}} \boldsymbol{P}\neg\exists x\boldsymbol{P}(x)$», которое может быть прочитано следующим образом: «число 0 по дефиниции – это произвольное свойство $\boldsymbol{P}$, не выполняющееся ни для одного предмета», что (при экстенсиональной трактовке свойств) эквивалентно фразе «число 0 – это, по определению, произвольное множество $\boldsymbol{P}$, которое является пустым».

в) Если **A**[**t**] – простая высказывательная форма вида $\mathbf{\Pi}(\alpha)$, то мы имеем дело с *определением высказывательной формы*. В этом случае определяемым термином **t** является n-местный предикатор **П**, а само определение имеет вид:

$$\mathbf{\Pi}(\alpha) \equiv_{\mathrm{Df}} \mathbf{B}(\alpha).$$

Посредством такого рода определений «раскрывается» смысл предиката $\mathbf{\Pi}(\alpha)$.

Приведем два примера такого сорта определений. Выражение вида «x есть наименьший элемент в множестве **M** тогда и только тогда, когда он меньше или равен любому элементу из множества **M**» задает смысл двухместной высказывательной формы (предиката) «x наименьший элемент в **M**». Формальная запись этого определения выглядит следующим образом: «Наименьший элемент в $(x, \mathbf{M}) \equiv_{\mathrm{Df}} \forall z(z \in \mathbf{M} \supset x \leq z)$». Другим примером является выражение «$(\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \equiv_{\mathrm{Df}} (\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$», задающее смысл высказывательной формы «$(\mathbf{A} \supset \mathbf{B})$».

Обратите внимание, что в определениях этого вида в качестве знака конвенционального тождества используется знак $\equiv_{\mathrm{Df}}$.

г) Если **A**[**t**] – выражение вида **Φ**(α), где **Φ** – *n*-местный предметный функтор, то дефиниция называется *определением функционального выражения*. Определяемым термином **t** является функтор **Φ**. Сама дефиниция в этом случае принимает вид:

$$\mathbf{\Phi}(\alpha) =_{\mathrm{Df}} \mathbf{\Sigma}(\alpha),$$

где **Φ**(α) – простое функциональное выражение, а **Σ**(α) – сложное функциональное выражение.

Примерами определений этого типа являются следующие два определения.

Допустим, что нам уже известна двухместная функция вычитания «$x \div y$», которая принимает значение $x - y$, если $\mathbf{x} > y$, и принимает значение 0 в противном случае. Допустим далее, что знак «+» используется в обычном своем арифметическом смысле. Тогда определения вида:

$$|x - y| =_{\mathrm{Df}} (x \div y) + (y \div x),$$
$$\mathbf{min}(x, y) =_{\mathrm{Df}} x \div (x \div y)$$

задают, соответственно, двухместную функцию вычитания по абсолютной величине и двухместную функцию выбора из двух чисел x и y минимального числа. Используя эти дефиниции и зная, как вычислить значения правых выражений, можно узнать и значения левых выражений для соответствующих значений x и y.

Еще одним примером является следующее выражение:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} =_{\mathrm{Df}} \{<x, y> \mid x \in \mathbf{A} \mathbin{\&} y \in \mathbf{B}\}.$$

В этой дефиниции задается определение операции Декартова произведения двух множеств **A** и **B**. Смысл выражения **A** × **B** раскрывается в определяющей части, которая читается так: «множество всевозможных пар $<x, y>$, таких что $x \in \mathbf{A} \mathbin{\&} y \in \mathbf{B}$».

(2) В зависимости от того, каким образом в определяющей части дефиниций охарактеризованы предметы, задаваемые определением, различают несколько типов определений.

а) *Генетические определения.* К ним относятся определения, в которых в определяющей части **B** указывается на способ порождения (образования) предметов. Например, генетическим будет определение «окружность есть по определению замкнутая линия, образованная вращением радиуса определенной длины вокруг неподвижной точки в некоторой плоскости». Здесь определяющая часть содержит указание на то, как можно построить окружность.

б) В определяющей части **B** может указываться на то, как используется предмет, какие функции он выполняет, для достижения каких целей он применяется. Такие определения можно назвать *целевыми*. Например, целевой дефиницией является определение «транспорт есть по определению средство, с помощью которого осуществляется пространственное перемещение людей и грузов».

в) В определяющей части **B** может фиксироваться, что представляет собой предмет, т. е. фиксируются какие-то его структурные особенности, его атрибуты, а также особенности внешнего вида. Такие определения можно назвать *квалифицирующими*. Примером такого определения является выражение «ромб есть по определению четырехугольник с равными сторонами».

г) В определяющей части **B** могут просто перечисляться те предметы, которые подпадают под определяемый термин. Например, выражение «день недели по определению – это понедельник, вторник, среда, четверг, пятница, суббота, воскресенье» отвечает на вопрос: что называется термином «день недели». Формальная запись этого определения в прикладном языке предикатов может выглядеть так: $\boldsymbol{x}$День недели($\boldsymbol{x}$) $=_{\mathrm{Df}}$ $\boldsymbol{x}$($\boldsymbol{x}$ = понедельник $\vee$ $\boldsymbol{x}$ = вторник $\vee$ $\boldsymbol{x}$ = среда $\vee$ $\boldsymbol{x}$ = четверг $\vee$ $\boldsymbol{x}$ = пятница $\vee$ $\boldsymbol{x}$ = суббота $\vee$ $\boldsymbol{x}$ = воскресенье). Такие определения называются *перечислительными*.

д) *Операциональные определения*. В определениях данного типа равенство определяемой и определяющей частей дефиниции осуществляется только в том случае, когда выполнена некоторая проверочная процедура, осуществляя которую можно узнать, подпадает ли произвольный предмет из рода **U** под данный термин или нет. Структура таких определений на самом деле имеет вид «**A**[**t**] $\leftrightarrow$ **B**, если выполнена проверочная процедура **C**; в противном случае термин неопределен». Например, определение: «кислота есть по определению жидкость, которая окрашивает лакмусовую бумажку в красный цвет» относится к операциональным. В формальном виде это определение можно записать так: «Кислота($\boldsymbol{x}$) $\equiv_{\mathrm{Df}}$ $\exists y$(Лакмусовая бумажка(y) & Окрашивает в(y, красный цвет, $\boldsymbol{x}$)), при условии, что x опущена в y; в противном случае термин "кислота" неопределен».

Такого рода определениями обычно вводят в теорию так называемые *диспозиционные предикаты*, т. е. предикаты, задающие некоторые скрытые качества предметов, наличие которых приводит к существованию у них некоторой предрасположенности (диспозиции) реагировать определенным образом на внешнее воздействие. Такими предикатами являются, например, «растворимый», «электропроводный», «хрупкий», «способен производить орудия туда» и многие другие. В данном случае, определяя операционально термин кислота, мы трактуем последний как диспозиционный предикат.

е) *Определения по частям.* В этих определениях $\mathbf{A}[\mathbf{t}]$ приравнивается $\mathbf{B}_1$, если выполнено условие $\mathbf{C}_1$; приравнивается $\mathbf{B}_2$, если выполнено условие $\mathbf{C}_2$,...; приравнивается $\mathbf{B}_n$, если выполнено условие $\mathbf{C}_n$. Для корректности определений последнего типа необходимо выполнение следующих требований: 1) условия $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_n$ должны быть исчерпывающими и 2) эти условия должны быть попарно несовместимы.

Примером такого рода определения является определение выражения $x \div y$, рассмотренного выше в данном параграфе, которое, условно говоря, задает функцию греческого отрицания («греческого» потому, что последние не знали отрицательных чисел, а «условно» потому, что они не знали и числа 0). Итак:

$$x \div y =_{\mathrm{Df}} \begin{cases} x - y, \text{ если } x > y \\ 0, \text{ если } x \leq y. \end{cases}$$

ж) *Определения через гипостазирование.* С их помощью раскрывается содержание собственных имен для свойств, отношений и функций, например таких, как «теплопроводность», «краснота», «белизна», и т. д. Особенность определений этого вида состоит в том, что их определяющие части как бы фиксируют в своей структуре три интеллектуальные процедуры, с помощью которых строятся объекты, обозначаемые указанными терминами. Вначале посредством так называемой *обобщающей абстракции* создаются конкретные понятия об индивидах или n-ках индивидов, обладающих некоторым признаком. Затем с помощью *изолирующей абстракции* эта их характеристика абстрагируется от индивидов и, наконец, с помощью процедуры *гипостазирования* она превращается в самостоятельный абстрактный объект мысли. Рассмотрим это на примере определения термина «отцовство».

Исходным понятием является понятие о паре предметов, между которыми существует отношение «x отец y»:

$$\langle x, y\rangle(\text{Мужчина}(x)\ \&\ \text{Родитель}(x, y)).$$

Данное понятие конкретное, здесь речь идет именно об индивидах (их парах), обобщенных данным понятием. Затем мы можем отделить отношение «отец» и рассмотреть его самостоятельно, т. е. создать понятие уже не о паре предметов, а о двухместном отношении «отец»:

$$\boldsymbol{R}\forall x\forall y(\boldsymbol{R}(x, y) \equiv (\text{Мужчина}(x)\ \&\ \text{Родитель}(x, y))).$$

Это уже абстрактное понятие, а не конкретное, так как элементами его будут не пары индивидов, а отношения. Но это еще не гипостаза. Следующим этапом является гипостазирование этого отношения, т. е. превращение его в абстрактный индивид:

$$\iota\boldsymbol{R}\forall x\forall y(\boldsymbol{R}(x, y) \equiv (\text{Мужчина}(x)\ \&\ \text{Родитель}(x, y))).$$

Приведенное выражение является уже именем некоторого особого предмета, а именно – именем отношения отцовства, что и фиксируется дефиницией:

$$\text{отцовство} =_{\text{Df}} \iota\boldsymbol{R}\forall x\forall y(\boldsymbol{R}(x, y) \equiv (\text{Мужчина}(x)\ \&\ \text{Родитель}(x, y))),$$

т. е. «отцовство по дефиниции – это то отношение, которое имеет место между любыми x и y тогда и только тогда, когда x является мужчиной и x является родителем y-ка».

з) Еще одним часто встречающимся в науке видом определений является *определение через абстракцию*. Так в логике называют определения, в которых определяющая часть фиксирует еще одну важную интеллектуальную процедуру.

Часто замечают, что некоторые предметы в определенных ситуациях ведут себя одинаковым образом и потому в отношении именно этой ситуации являются неразличимыми, тождественными друг другу. Например, будучи положены на две чаши весов, они уравновешивают их, или, вступив на рынке в отношение куплипродажи, они обмениваются друг на друга, и т. д. Такое равенство указывает на то, что они (будучи разными предметами) обладают одинаковой величиной какой-то своей характеристики. Тогда можно создать абстрактное понятие об этой их характеристике, которое будет звучать примерно так: «то общее у предметов, что делает их равными друг другу в рассматриваемой ситуации».

Именно так и образуются определения через абстракцию. В частности, рассмотрим абстрактное понятие об одноместной предметно-функциональной характеристике «вес какого-либо предмета»:

$$f\forall x\forall y(\text{Уравнивают весы}(x, y) \equiv f(x) = f(y)).$$

Если теперь мы собираемся задать гипостазу «вес», т. е. собираемся образовать новое понятие о некотором абстрактном предмете, то для этого достаточно применить к данному абстрактному понятию процедуру гипостазирования. В результате этой процедуры строится определение:

$$\text{вес} =_{\text{Df}} \iota f\forall x\forall y(\text{Уравнивают весы}(x, y) \equiv f(x) = f(y)),$$

которое выражает мысль о том, что термин «вес» следует понимать как имя той самой предметно-функциональной характеристики, соответствующие величины которой для любых x и y будут равны тогда и только тогда, когда эти предметы уравновешивают чаши весов.

Явные определения обладают одним замечательным свойством – определяемые и определяющие части могут в любом контексте замещаться друг на друга, т. е. для них верно следующее правило:

$$\frac{\mathbf{C} \leftrightarrow \mathbf{D},\ \mathbf{K}(\mathbf{C})}{\mathbf{K}(\mathbf{C}:\mathbf{D})},$$

называемое *правилом замены по дефиниции*. Это правило надо понимать следующим образом. Пусть дано произвольное явное определение $\mathbf{C} \leftrightarrow \mathbf{D}$ и пусть дан контекст $\mathbf{K}(\mathbf{C})$, содержащий в качестве подтекста выражение $\mathbf{C}$, являющееся либо определяемой, либо определяющей частью дефиниции $\mathbf{C} \leftrightarrow \mathbf{D}$. Тогда можно перейти от контекста $\mathbf{K}(\mathbf{C})$ к контексту $\mathbf{K}(\mathbf{C}:\mathbf{D})$, т. е. к контексту, в котором некоторый подтекст $\mathbf{C}$ (не обязательно каждый) заменен на подтекст $\mathbf{D}$. Это правило позволяет использовать явные определения в процессах дедуктивного вывода.

§3. Неявные определения

Существует целый ряд определений, не имеющих вид тождества **A[t]** $\leftrightarrow$ **B**, т. е. не относящихся к явным определениям. Такого рода определения называются *неявными.*

Неявные **определения – это определения, задаваемые лингвистической конструкцией вида:**

t есть по дефиниции то, что удовлетворяет условиям: $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$,..., $\mathbf{B_n}$.

Все неявные определения имеют следующие особенности: 1) условия $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$,..., $\mathbf{B_n}$ – это предложения, 2) определяемый термин **t** – это то минимальное выражение, которое входит в каждое определяющее условие $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$,..., $\mathbf{B_n}$, 3) в силу сказанного, для неявных определений не действует *правило замены по дефиниции.*

Неявные определения делятся на три вида: *индуктивные*, *рекурсивные и аксиоматические.*

а) Тот вид определений, который называется *индуктивным*, уже использовался в учебнике. Именно с помощью индуктивных определений вводилось понятие формулы в логике предикатов и логике высказываний и понятие терма в логике предикатов. Приведем еще один пример индуктивного определения – определение натурального числа. Итак:

«*Натуральное число* по дефиниции есть то, что удовлетворяет условиям:

1. 0 есть натуральное число.
2. Если *n* – натуральное число, то *n'* – натуральное число.
3. Ничто иное не есть натуральное число».

Суть таких определений состоит в следующем. Если нам требуется задать класс предметов, подпадающих под некоторый термин, то мы прямо и недвусмысленно объявляем некоторые предметы элементами этого класса. Данный пункт определения называется *базисом индукции.* В приведенном примере ему соответствует 1-й пункт определения, где число 0 объявлено натуральным числом. После этого все остальные предметы, входящие в класс, порождаются с помощью некоторых процедур. Такой пункт определения называется *индуктивным шагом.* В нашем примере ему соответствует пункт 2, который говорит, что если удалось построить некоторое натуральное число, то и число, получающееся из него с помощью порождающей процедуры, тоже будет натуральным числом. В качестве порождающей процедуры здесь используется функция, которая называется «следовать за» и которая обозначена штрихом. 3-й пункт определения ограничивает класс натуральных чисел только теми объектами, которые задаются первыми двумя пунктами.

Результатом применения этого определения будет построение множества натуральных чисел. Действительно, по пункту 1, 0 – натуральное число; тогда, по пункту 2, объект 0' – тоже натуральное число; тогда, по пункту 2, объект 0'' – тоже натуральное число и т. д. Таким образом, возникает бесконечная последовательность:

$$0, 0', 0'', 0''', 0'''', 0''''',\ldots$$

Используя теперь цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 и позиционную запись имен натуральных чисел, мы можем обозначить любое натуральное число цифрами: цифрой «0» обозначается число 0, цифрой «1» обозначается число 0', цифрой «2» обозначается число 0'' и т. д.

Обратим внимание на следующее обстоятельство: определяемый термин, а определялся термин «*натуральное число*», входит в каждое из предложений нашего определения. Такая особенность (вхождение определяемого термина в определяющие выражения) является характерной чертой для всех неявных определений.

В общем случае в пункте, задающем «базис индукции», может указываться не один предмет, а много предметов, и даже бесконечное их число. С другой стороны, в пунктах, задающих индуктивные шаги, может использоваться не одна порождающая операция, как это имеет место в приведенном примере, а несколько операций. Именно с такой ситуацией мы сталкиваемся в индуктивном определении формул логики высказываний. Здесь в базисе индукции любая пропозициональная переменная, а их число бесконечно, объявляется формулой. Порождающими же процедурами в этом случае являются процедуры применения логических констант $\neg$, &, $\vee$, $\supset$ к ранее построенным формулам.

б) *Рекурсивные* определения очень похожи на определения индуктивные, но применяются для задания не классов предметов, а некоторых функций. Приведем пример рекурсивного определения. Итак:

«*Операция сложение* («+») по определению есть то, что удовлетворяет условиям:

$$1)\ x + 0 = x$$
$$2)\ x + y' = (x + y)'».$$

Основная особенность этого определения такова. Понимание некоторой функции состоит в знании ее значений для определенных значений аргументов. Именно это и делает рекурсивное определение сложения. Действительно, 1-й пункт определения, который называется *базисом рекурсии*, говорит, что значение функции $x + y$ равно x, если $y = 0$. 2-й пункт, который собственно и называется *рекурсией*, говорит, что если мы хотим вычислить значение $x + y'$, где y' – число, следующее за y, то надо вычислить, чему равно $x + y$, и взять число, следующее за $x + y$.

Покажем действие этого определения на примере. Пусть нам требуется вычислить, чему равно выражение 5 + 2.

По пункту 1, мы знаем, что $5 + 0 = 5$.
Тогда, по 2-му пункту, $5 + 1 = 5 + 0' = (5 + 0)' = 5' = 6$.
Тогда, по 2-му пункту, $5 + 2 = 5 + 1' = (5 + 1)' = 6' = 7$.
Итак, мы установили, что $5 + 2 = 7$.

в) Еще одна разновидность неявных определений – *аксиоматические определения*. Считается, что в этих определениях некоторый термин определяется путем указания той совокупности аксиом, в которой он содержится. Так как аксиомы – это истинные утверждения о предметах некоторой предметной области, то тем самым термин, входящий в эти аксиомы, получает и свое значение. Например, считается, что аксиомы Евклида неявно определяют такие термины, как «точка», «прямая», «плоскость».

§4. Другие виды определений

Кроме указанного членения всех определений на явные и неявные, существуют другие способы их деления, по иным основаниям.

а) Часто говорят о некоторой контекстной зависимости определяемого термина. При этом сам термин «контекстная зависимость» понимается в двух различных смыслах. С одной стороны, речь может идти о получении некоторого неявного знания об интересующем нас термине из рассмотрения того контекста, в состав которого он входит. В этом случае понимание смысла контекста позволяет нам предположить и возможное значение соответствующего термина. С другой стороны, речь часто идет об определении термина посредством определения всех контекстов, в состав которых он входит. В первом случае будем говорить об *определении через контекст*. Во втором же случае будем говорить о *контекстуальном определении*. Более строго данное различие можно выразить следующим образом:

> **Определение некоторого термина считается *контекстуальным*, если и только если определяемая часть A, в которую входит данный термин, представляет собой все контексты его нормативного употребления. В противном случае определение считается *неконтекстуальным*.**

Чтобы задать все контексты употребления некоторого термина, необходимо использовать соответствующие метазнаки. Примером контекстуального определения является такое определение знака «$\supset$»:

$$(\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \equiv_{\mathrm{Df}} (\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B}),$$

где выражение ($\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$) задает все контексты употребления знака «$\supset$». Это достигается за счет применения в определении метазнаков **A** и **B**.

Примером неконтекстуального определения является следующее выражение:

$$\text{Человек}(x) \equiv_{\mathrm{Df}} (\text{Двуногое}(x)\ \&\ \text{Бесперое}(x)).$$

Здесь важно следующее. Хотя, согласно правилу *замены по дефиниции*, мы можем в любом контексте заменить одноместный предикат «Человек(x)» на выражение «Двуногое(x) & Бесперое(x)», однако в самом определении данного предиката отсутствуют какие-либо упоминания о контекстах его использования. Именно в этом смысле данное определение и не является контекстуальным.

> ***Определения через контекст*** **– это определения, в которых определяющая часть B представляет собой совокупность каких-то контекстов, в которых встречается определяемый термин. В противном случае определение не относится к числу определений через контекст.**

Примером определения через контекст является неявное аксиоматическое определение терминов «точка», «прямая», «плоскость» посредством аксиом Евклидовой геометрии.

б) Все определения часто делят на *реальные* и *номинальные*.

Выше говорилось, что все определения являются конвенциями, т. е. соглашениями об употреблении терминов. С этой точки зрения, все они являются *номинальными* (от лат. «nomen» – название, имя, термин): ведь строя определение, мы вводим только термин (имя), пытаемся разъяснить смысл его употребления. Иногда даже специально подчеркивают условный характер определений посредством введения их такими фразами, как: «давайте считать, что термин **t** обозначает...», «термином **t** будем называть...», «под термином **t** я буду понимать...» и многими другими (не столь определенными) способами. Номинальные определения, будучи конвенциями, не являются предложениями, а потому и не могут оцениваться ни как истинные, ни как ложные.

Так, например, в главе II в состав языка логики высказываний были введены выражения вида $(\mathbf{A} \downarrow \mathbf{B})$, $(\mathbf{A} \veebar \mathbf{B})$, $(\mathbf{A} \equiv \mathbf{B})$ посредством их определения. При этом было особо подчеркнуто, что эти выражения должны рассматриваться как *сокращения* для формул $(\neg\mathbf{A} \mathbin{\&} \neg\mathbf{B})$, $(\mathbf{A} \mathbin{\&} \neg\mathbf{B}) \vee (\neg\mathbf{A} \mathbin{\&} \mathbf{B})$ и $(\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \mathbin{\&} (\mathbf{B} \supset \mathbf{A})$ соответственно. Указание на то, что данные выражения должны рассматриваться как простое сокращение для более «громоздких» формул, как раз и говорит о том, что в данном случае мы имеем дело с номинальным определением. В принципе, применяя эти определения, мы можем устранить определяемые связки $\downarrow$, $\veebar$ и $\equiv$.

Выше также говорилось, что неявные определения имеют структуру следующего вида: «**t** есть по определению то, что удовлетворяет условиям: $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_n$», которая как раз и показывает условный (конвенциональный) характер определений этого типа.

Данная структура, однако, не всегда задается в «открытой» форме. Так, определяя в главах II и III понятия терма и формулы, мы не оговаривали указанную конвенциональную структуру. Но наше замечание, что и термы, и соответствующие формулы вводятся по определению, как раз и говорит о конвенциональном характере следующих после этого утверждений.

Тем не менее достаточно часто, особенно в составе аксиоматических теорий, конструкция вида «**t** есть по определению то, что удовлетворяет условиям: $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_n$» не используется, а используются в качестве аксиом лишь предложения $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_n$, входящие в состав условий неявных определений. Например, в составе формальной арифметики присутствуют в качестве аксиом два утверждения:

$$x + 0 = x,$$
$$x + y' = (x + y)',$$

посредством которых тоже неявно задается смысл операции сложения.

Аналогичная ситуация имеет место и для явных определений. Например, мы могли бы не вводить знак «$\veebar$» по определению, а задать его в некоторой логической системе посредством формулы вида:

$$(\mathbf{A} \veebar \mathbf{B}) \equiv ((\mathbf{A} \,\&\, \neg\mathbf{B}) \vee (\neg\mathbf{A} \,\&\, \mathbf{B})).$$

Про такого рода предложения нельзя сказать, что они являются определениями в собственном смысле этого слова, но про них можно сказать, что они в составе теории играют роль определений. Далее мы увидим, что существуют и другие лингвистические конструкции, которые в составе теоретического знания могут играть (и на самом деле реально играют) роль определений. Итак:

Будем говорить, что определение является *реальным*, если оно введено посредством предложения, играющего роль определения.

С этой точки зрения, рассматривая явные определения, следует различать две лингвистические конструкции:

$$\mathbf{A}[\mathbf{t}] \leftrightarrow \mathbf{B},$$
$$\mathbf{A}[\mathbf{t}] \text{ есть } \mathbf{B}.$$

В первом случае термин **t** вводится по определению, а во втором – он вводится не определением, а некоторым предложением. Приведем соответствующий пример:

Человек по определению есть двуногий и бесперый.

Человек есть двуногое и бесперое.

В первой лингвистической конструкции мы имеем дело с обычным номинальным определением, а во второй – не с определением, а с предложением, играющим роль определения.

Обратим внимание, что в случае, когда предложение, играющее роль определения, имеет вид **A[t]** ≡ (есть) **B**, в выражении **B** не должен содержатся определяемый термин.

Возникает вопрос, почему некоторые предложения, не являющиеся в собственном смысле определениями, могут тем не менее играть роль определений и потому часто рассмативаются как определения, а именно – как реальные определения? Для явных определениях это обусловлено наличием в логике следующих двух принципов:

$$\frac{\mathrm{A[t]} \leftrightarrow \mathbf{B}}{\mathrm{A[t]}\ \text{есть}\ \mathbf{B}} \quad \text{и} \quad \frac{\mathrm{A[t]}\ \text{есть}\ \mathbf{B}}{\mathrm{A[t]} \leftrightarrow \mathbf{B},}$$

которые указывают на возможность перехода от определения некоторого термина **t** к заданию соответствующего предложения, в состав которого входит данный термин, а также на возможность обратного перехода. Это и делает в некотором смысле неразличимыми следующие выражения:

Человек по определению есть двуногий и бесперый.
Человек есть двуногое и бесперое.

При этом первое выражение трактуется как явное номинальное определение, а второе – как определение неявное и реальное. Хотя на самом деле именно первое выражение и является настоящим определением, а второе – лишь играет его роль.

в) Часто среди определений выделяют так называемые *родовидовые* определения, т. е. определения через указание на род и видовое отличие. К такому роду определений относятся почти все определения, так как почти любая дефиниция содержит некоторые переменные, пробегающие по какому-то универсуму. Последний как раз и является тем родом, внутри которого с помощью видового отличия выделяются определяемые объекты. Однако слово «почти» не является случайным. Среди определений имеются и такие, которые нельзя отнести к родовидовым. Это так называемые *фундаментальные индуктивные определения.* Дело заключается в том, что характеристика определения как родовидового предполагает, что род уже имеется, и потому остается только с помощью видового отличия в этом наличествующем роде выделить класс определяемых предметов. Однако фундаментальные индуктивные определения не предполагают никакого заранее данного универсума, напротив, они сами строят универсум рассуждения. Примером фундаментального определения является выше рассмотренное определение натурального числа.

§5. Требования к корректности определений

К определениям предъявляют различного рода *требования*, соблюдение которых гарантирует корректность этой логической операции. Они распадаются на требования общего характера, которые применяются ко всем определениям, и специальные требования, которые должны выполняться для отдельных видов определений (некоторые из них уже были указаны).

1. *Общие требования.*

(1.1.) Всякое определение должно быть *ясным* и *четким*.

Это означает, во-первых, что термины, посредством которых разъясняется смысл определяемого термина, сами должны быть осмысленными выражениями. Если смыслы этих терминов не ясны, не понятны, то определение не достигает основной своей познавательной цели – приписывания термину строго фиксированного смысла и значения. В этом случае должны быть предварительно разъяснены (определены) термины, посредством которых задают смысл исходного выражения.

Во-вторых, это означает, что в определении надо указывать лишь то, что необходимо и достаточно для задания смысла термина, т. е. в определении не должно быть ничего лишнего. Приведем пример. Определение термина «квадрат» через указание на то, что это «четырехугольник, являющийся ромбом, у которого равны все стороны, равны все углы, равны диагонали и последние делятся при их пересечении пополам», трудно признать корректным, так как оно содержит совершенно лишнюю информацию, которая не столько разъясняет, сколько затемняет смысл определяемого термина и делает его громоздким.

В-третьих, связь между осмысленными терминами, входящими в определение, сама должна оказаться осмысленной. В противном случае мы будем иметь дело с абракадаброй, некоторой тарабарщиной. Приведем без каких либо комментариев несколько примеров такой тарабарщины, довольно часто встречающейся в различного рода псевдоопределениях псевдонаучных произведений:

а) «Понимание – это реконструкция личностных измерений объективации деятельности».

б) «Философская работа – это такая модальность сознания как внутреннего многомерного гетерогенного дискретного пространства экзистенциальной территории личности, которая может быть описана как виртуальное поле смыслов и как уникальное время человеческой субъективности».

г) «Информация – это фундаментальный генерализационно-единый безначально-бесконечный законопроцесс автоосциляционного, резонансно-сотового, частотно-квантового и волнового отношения, взаимодействия, взаимопревращения и взаимосохранения (в пространстве и времени) энергии, движения, массы и антимассы на основе материализации и дематериализации в микро- и макроструктурах Вселенной».

(1.2.) Требование ясности и четкости определений заставляет нас одни термины определять посредством других, а эти последние, в свою очередь, определять через некоторые иные термины. В науке это приводит к построению системы взаимосвязанных определений. К этим совокупностям определений предъявляется требование: они не должны содержать *порочного круга*, т. е. не должно возникать ситуаций, когда термин **В**, посредством которого определяется термин **А**, в конечном итоге сам определяется через термин **А**. Например, система из двух определений – «логика – это наука о законах правильного мышления» и «правильное мышление – это мышление, подчиняющееся требованиям науки логики» содержит круг, так как «логика» определяется через «правильное мышление», а «правильное мышление», в свою очередь, определяется через «логику». Наличие порочного круга считается ошибкой в системе определений.

(1.3.) Определения – это конвенции, и потому в них допускаются такие трактовки определяемых терминов, которые могут не совпадать с общепринятым их словоупотреблением. В частности, задаваемый определением класс предметов может оказаться шире или уже того класса предметов, который по традиции связывается с определяемым термином. Такое расхождение в общем случае не является ошибкой, хотя и может быть неудобным и вести к недоразумениям. Поэтому, если данное расхождение обусловлено какими-то важными и принципиальными соображениями, а не является досадным промахом, то следует каждый раз специально оговаривать это расхождение.

Если же целью определения была попытка уточнения (экспликации) значения термина, который используется в обыденной жизни или научной практике, т. е. построение реального определения, то такого рода расхождение следует считать ошибкой. Иначе говоря, в этом случае в качестве условия правильности определений необходимо потребовать, чтобы они были *соразмерными*, т. е. класс предметов, который традиционно считается подпадающим под определяемый термин, должен совпасть с тем классом, который задается определяющей частью. Выше говорилось, что цель Платона, который определил человека как «двуногое и бесперое существо», состояла в попытке найти такую совокупность признаков, которая была бы реально присуща только людям. Поэтому понятна та издевка, с какой киник Диоген произнес фразу «Вот тебе человек!», бросив к ногам Платона ощипанного петуха.

2. *Специальные требования.*

В дополнение к сказанному выше, к явным определениям предъявляется требование, состоящее в том, что определяемый термин **t** из определяемой части **A** не должен встречаться в определяющей части **B**. Если явное определение таким свойством не обладает, то оно считается ошибочным. Про такое определение говорят, что оно является *тавтологичным*, т. е. определяет *то же через то же*, а тем самым не несет никакой новой информации об употреблении терминов. Является тавтологичным, например, определение множества как совокупности любых предметов, так как определяемый термин «множество» входит в определяющую часть, где слово «совокупность» есть просто синоним слова «множество».

Понятие множества, как об этом говорилось выше, является фундаментальным понятием, т. е. является таким понятием, смысл которого нельзя задать посредством явного определения через другие термины. Однако это не означает, что данное понятие и, вообще, другие фундаментальные понятия не могут быть в принципе определены. На самом деле они определяются, но неявно – посредством аксиоматических определений. Так, аксиомы теории множеств неявно определяют понятие множества.

Как выше уже было отмечено, данное требование – отсутствие определяемого термина в определяющей части – не выполняется (и не должно выполняться) для неявных определений. При этом в данном случае никакой ошибки тавтологичности нет.

Для всех явных определений при их формальной записи на языке исчисления предикатов должны выполняться следующие требования согласованности: (1) тип переменных в **А** и **В** должен быть одинаков, т. е. если α – индивидная переменная в определяемой части **А**, то и в определяющей части **В** переменная α должна являться индивидной, если α – это предикатная переменная определенной местности в **А**, то и в **В** переменная α должна быть предикатной переменной той же местности и т. д.; (2) тип выражения **А** должен совпадать с типом выражения **В**, т. е. если **А** – имя, то и **В** должно быть именем, если **А** – универсалия, то и **В** должно быть универсалией, и т. д.; (3) свободные переменные, входящие в определяемую часть **А**, должны в точности совпасть со свободными переменными, входящими в определяющую часть **В**.

3. *Приемы, сходные с определением.*

Среди различных познавательных процедур имеются приемы, которые, не будучи сами по себе определениями, в какой-то мере выполняют роль разъяснения значений терминов, т. е. выполняют роль определений. К таким приемам относятся так называемые *остенсивные «определения»*, *описание предмета* и его *сравнение* с какими-то иными предметами.

Остенсивное «определение» – это разъяснение значений терминов путем непосредственного предъявления экземпляров предметов, которые обозначаются ими. Ясно, что эта операция, хотя и носит условное название «определение», не является таковой, так как выходит за пределы языка.

Остенсивные «определения» являются чрезвычайно важным познавательным приемом. Именно с их помощью мы постепенно овладеваем родным языком, накапливаем предварительные сведения о его словарном составе. Велика роль остенсивных «определений» и в научной практике – ведь смыслы наиболее фундаментальных терминов нельзя задать через их явные словесные формулировки, т. е. свести к чему-то более простому и более фундаментальному, так как ничего более простого и более фундаментального просто не существует. Поэтому для разъяснения значений таких терминов приходится прибегать к наглядным примерам, указывать или предъявлять те экземпляры предметов, которые обозначаются данными терминами. Вводя таким способом фундаментальные термины, мы получаем тем самым возможность далее разъяснять смыслы других терминов, уже не выходя за рамки языка. Например, что такое «метр», нельзя разъяснить никакой фразой. Метр – это тот предмет, тот эталон, который хранится в особых условиях. Поэтому настоящий метр можно только предъявить, показать.

Другим познавательным приемом является *описание*. В этом случае вместо определения термина приводят более или менее подробный перечень тех признаков, которые присущи предметам, подпадающим под этот термин. Например, «тигр – это животное, которое похоже на кошку, но более крупных размеров, имеющее рыжую окраску с черными поперечными полосами и являющееся хищником». Этот перечень может продолжаться и далее. Цель такого описания – создать у слушателей, которые ни разу не видели тигра, некоторый образ этого животного. Именно так мы и поступили, когда пытались разъяснить, что подразумевают в логике под термином «индивид».

Описание является важным познавательным приемом, и его не следует недооценивать. Особое значение он имеет для так называемых описательных дисциплин – истории, биологии, геологии и т. д. В этих науках описания выполняют роль определений и позволяют, хотя и недостаточно четко, фиксировать смыслы терминов. Тем самым, здесь демонстрируется еще один прием, с помощью которого выражения, не являющиеся определениями в собственном смысле этого слова, в составе науки могут играть роль определений.

Иногда выражения языка разъясняются с помощью *сравнения* одного предмета с другими предметами. Часто такого рода сравнения носят метафорический характер, например: «верблюд – корабль пустыни», «нефть – черное золото» и т. п. Выражения такого рода, конечно же, определениями не являются и научной ценности не имеют, хотя и могут выполнять роль идеологических клише.

ГЛАВА VIII

ПРАВДОПОДОБНЫЕ РАССУЖДЕНИЯ

§1. Общие сведения о правдоподобных рассуждениях

Важнейшей задачей логики является исследование различных интеллектуальных процедур, посредством которых из уже имеющихся у нас сведений можно получать новую информацию. Одна из таких процедур – процедура дедукции, имеющая место в том случае, когда совокупная информация, выраженная предложениями $\mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_n$, содержит в качестве своей части (иногда в неявной форме) информацию, выраженную высказыванием **B**. Дедукция позволяет извлечь эту информацию и представить ее в явной форме. Способом такого извлечения является вывод. Его построение как раз и должно убедить нас в том, что заключенная в высказывании **B** информация «вытекает» из имеющихся у нас сведений.

Однако достаточно часто мы встречаемся с иной ситуацией: полученные тем или иным способом сведения $\mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_n$ используются не для осуществления дедуктивного вывода высказывания **B** из посылок $\mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_n$, а применяются как некая «подсказка», «намек», «подводящий», «наводящий» нас на мысль о возможности принятия высказывания **B**. Рассуждение в этом случае строится по следующей схеме: если информация, содержащаяся в посылках $\mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_n$, верна, то правдоподобно было бы считать, что имеет место и **B**. Переход от посылок к заключению носит здесь не достоверный (как при дедукции), а лишь правдоподобный (проблематичный) характер. Посылки лишь подтверждают **B**, делают истинность **B** более достоверной. Именно такого рода рассуждения и будут далее считаться *правдоподобными*.

Правдоподобный характер связи между посылками и заключением будем обозначать посредством записи

$$\mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_n \Vdash \mathbf{B},$$

которая читается: «из посылок $\mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_n$ *правдоподобно следует* **B**». При этом отношение правдоподобного следования «$\Vdash$» надо отличать от отношения логического следования «$\vDash$», лежащего в основе теории дедукции.

Иногда при осуществлении правдоподобного перехода от посылок к заключению удается достаточно точно оценить степень этой правдоподобности, т. е. оценить, насколько обоснована истинность заключения **B** при истинности посылок $\mathbf{A}_1,..., \mathbf{A}_n$. Для решения этой задачи используется аппарат *теории вероятности*.

В теории вероятности исследуются так называемые *массовые события* – события, которые могут быть *исходами* (результатами) какого-то много раз повторяющегося опыта. Такими событиями являются, например, выпадение той или иной грани игральной кости при неоднократном ее бросании, прыжок спортсмена на определенную длину, попадание в «десятку» при стрельбе из лука, мнение человека, высказанное им в ходе социологического опроса, и т. д. Обычно, если осуществляется некоторый опыт **a** и имеется *полная система несовместимых исходов* (результатов) данного опыта – $\mathbf{U} = \{x_1, x_2,..., x_k\}$, то каждое событие $x_i \in \mathbf{U}$ называют *элементарным событием*. При этом под полной системой несовместимых исходов имеют в виду такую систему результатов опыта, которая удовлетворяет двум условиям: (1) каждый возможный результат опыта **a** может быть представлен с помощью данной системы исходов, (2) попарно различные исходы x_i и x_j, входящие в данную систему, не могут осуществиться одновременно. Так, в случае, когда опыт **a** состоит в бросании игральной кости, элементарными событиями будут выпадения различных граней. Если опыт **a** состоит в прыжках в длину, то элементарными событиями будут прыжки на определенное расстояние.

Сложные события трактуются как совокупности элементарных, т. е. как подмножества множества **U**. Считается, что сложное событие осуществилось, если осуществилось по крайней мере одно из элементарных событий, входящих в него.

Если события выражать посредством пропозициональных переменных **p**, **q**, **r**, **s**,..., то сложные события можно записывать в виде формул – $(\mathbf{p} \,\&\, \mathbf{q})$, $(\mathbf{r} \vee \mathbf{p})$, $(\mathbf{s} \supset \mathbf{q})$, $(\mathbf{p} \equiv \mathbf{s})$, $\neg\mathbf{p}$. Первая формула говорит о наступлении сразу двух событий – **p** и **q**, вторая формула говорит о наступлении по крайней мере одного из событий – **r** или **p**. Третья формула говорит о наступлении так называемого *условного события* **q**, которое осуществляется всякий раз, когда осуществляется событие **s**. Четвертая формула говорит о наступлении двух условных событий – **s** и **p**. Причем событие **s** осуществляется всякий раз, когда осуществляется событие **p**, а событие **p** осуществляется всегда, когда осуществляется событие **s**. Наконец, последняя формула говорит о наступлении такого события, которое осуществляется тогда и только тогда, когда не осуществляется событие **p**.

Допустим, что посредством **p** репрезентировано высказывание о событии «выпало четное число», а через **q** – «выпало число, делящееся на 2», тогда эти два высказывания будут эквивалентными – ($\mathbf{p} \equiv \mathbf{q}$), так как они говорят об одном и том же множестве событий – {выпало число 2, выпало число 4, выпало число 6}. Если через **p** репрезентировано высказывание «осуществлен прыжок за 5 метров», а через **q** – «осуществлен прыжок за 4 метра», то справедливо будет утверждать – ($\mathbf{p} \supset \mathbf{q}$), так как множество прыжков за 5 метров включается во множество прыжков за 4 метра. Если **p** репрезентирует высказывание «выпало четное число», а $\neg\mathbf{p}$ – «неверно, что выпало четное число», что эквивалентно событию «выпало нечетное число», то выражение ($\mathbf{p} \vee \neg\mathbf{p}$) задаст событие «выпало четное или нечетное число», которое совпадает с множеством всех исходов бросания игральной кости; выражение же ($\mathbf{p} \mathbin{\&} \neg\mathbf{p}$) задаст событие «выпало четное и нечетное число», которое является пустым множеством, так как такое событие никогда не может осуществиться. Первое из этих событий, реализующееся при любом исходе опыта, называется *достоверным* и обозначается знаком «**1**». Второе событие называется *невозможным* и обозначается знаком «**0**».

С каждым событием или высказыванием о событии **A** иногда удается связать величину **P(A)**, называемую *вероятностной мерой* (или просто *вероятностью*). Функция **P(A)** принимает значения в замкнутом числовом интервале [0, 1]. При этом, если **A** – это событие, то величина **P(A)** указывает на вероятность осуществления этого события, а если **A** – высказывание о событии, то величина **P(A)** говорит о вероятности оценки данного высказывания как истинного.

Одноместная функция P(A) считается *вероятностной мерой*, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $0 \leqslant$ P(A), для любого A,

2) P(1) = 1,

3) Если A & B = 0, то P(A $\vee$ B) = P(A) + P(B).

В теории вероятности эти условия позволяют вычислять вероятность сложного события (высказывания), если известны вероятности элементарных событий (высказываний). Таким образом, задача о нахождении вероятности для произвольного события **A** сводится к задаче о нахождении вероятностных оценок элементарных событий (высказываний).

Существует по крайней мере два различных способа задания вероятности исходов опыта. Первый из них основан на идее симметрии и ведет к так называемому *классическому* (*априорному*) *понятию вероятности*. Это понятие используется в том случае, когда у нас нет никаких разумных оснований считать, что вероятность одного элементарного исхода некоторого опыта должна отличаться от вероятности других элементарных исходов. Например, при бросании монеты у нас нет никаких оснований полагать, что выпадение одной стороны монеты («орла») должно происходить чаще, чем выпадение другой стороны («решетки»): монета является симметричным объектом и потому априорно (до всякого эксперимента) можно считать, что выпадение каждой из сторон равновероятно. Так как равновероятных элементарных исходов в этом случае существует ровно 2, а в сумме вероятности не должны превышать 1, то вероятность каждого из событий («выпал орел» и «выпала решетка») должна быть равна $^1/_2$. В случае бросания игральной кости, в силу ее симметричности, можно априорно считать вероятность каждого из исходов равной $^1/_6$.

Представим теперь, что мы имеем дело с фальшивой игральной костью, в которую запаян свинец таким образом, чтобы чаще выпадало число 6. Тогда уже нельзя воспользоваться идеей симметричности и априорно задать вероятность исходов, так как симметрия нарушена, а потому для решения вопроса о вероятности некоторого исхода бросания кости необходимо произвести ее испытание. С этой целью осуществляется серия опытов **a**: бросается кость и записываются исходы этого бросания. Допустим, проведена 1 тысяча бросков и выяснилось, что в 350 случаях выпало число 6. Тогда можно ввести некоторую величину δ, которая называется *относительной частотой* исхода x – $\delta(x) = {}^m/_n$, где m – число благоприятных (положительных) исходов, а n – число всех исходов в данной серии бросков. В нашем случае $\delta(6) = {}^7/_{20}$. На практике эту величину можно принять за вероятность выпадения шестерки, т. е. считать **P**(6) = $^7/_{20}$. Введенная таким образом величина называется *статистической* (*апостериорной*) *вероятностью*.

Использование относительной частоты исходов в качестве вероятностной меры некоторого события определяется *законом больших чисел*, согласно которому при неограниченном увеличении серии опытов относительная частота исходов δ будет колебаться около некоторой величины, постепенно приближаясь к ней. Величина, к которой будет стремиться относительная частота при неограниченном увеличении серии опытов, как раз и есть *вероятность* наступления события. Она будет находиться где-то вблизи $^7/_{20}$, а потому последняя величина и может быть принята за приблизительное значение вероятности. Чтобы расхождение между относительной частотой и вероятностью не было значительным, серия опытов, в которой устанавливается относительная частота, должна быть достаточно представительной.

Рассмотрим сказанное на примере формул классической логики высказываний. С каждой формулой **A**, содержащей r различных пропозициональных переменных, свяжем величину **P**(**A**), задающую *вероятность истинности* этой формулы. Для этого рассмотрим 2^r различных наборов значений пропозициональных переменных. Множество этих наборов представляет собой полную систему несовместимых исходов некоторого опыта, состоящего в том, что на каждом из этих наборов проверяется значение **A**. Так как у нас нет никаких оснований предпочесть один набор значений пропозициональных переменных другому, будем считать, что все они равновероятны, и потому вероятность каждого набора априорно определяем равной $^1/_{2^r}$.

Будем считать далее некоторый набор значений пропозициональных переменных *благоприятным* (*положительным*) *исходом*, если на этом наборе формула **A** принимает значение «истина». Величину **P**(**A**) можно тогда определить как относительную частоту исходов $^m/_n$, где m – число наборов, на которых формула **A** приняла значение «истина», а n – число всех наборов.

При данных условиях, ввиду того что тождественно-истинная формула **A** принимает значение «истина» на всех наборах значений своих переменных, относительная частота $^m/_n = 1$, т. е. **P**(**A**) = 1. Это говорит о том, что каждая тождественно-истинная формула описывает некоторое достоверное событие и потому **A** = **1**. С другой стороны, для тождественно-ложной формулы **A** величина $^m/_n = 0$, т. е. **P(A)** = 0. Таким образом, любая тождественно-ложная формула описывает некоторое невозможное событие и потому **A = 0**. Вероятность всех остальных формул лежит в интервале [0, 1], т. е. для каждой формулы справедливо, что $0 \leq \mathbf{P(A)} \leq 1$. Рассматривая с этой точки зрения истинностную таблицу, скажем, формулы **p & (q ∨ r)**:

p	q	r	p & (q ∨ r)
и	*и*	*и*	*и*
и	*и*	*л*	*и*
и	*л*	*и*	*и*
и	*л*	*л*	*л*
л	*и*	*и*	*л*
л	*и*	*л*	*л*
л	*л*	*и*	*л*
л	*л*	*л*	*л*

находим, что **P(p & (q ∨ r))** = $^3/_8$.

В теории вероятностей два события (высказывания) **A** и **B** называются *независимыми*, если осуществление (истинность) или неосуществление (ложность) одного из них никак не влияет на осуществление (истинность) или неосуществление (ложность) другого. Так, при бросании кости два события – «выпало четное число» и «выпало число, делящееся на 3» – являются независимыми.

Если **A** и **B** независимые события (высказывания), то для них в теории вероятности справедлива теорема:

(1) $\mathbf{P(A \,\&\, B) = P(A) \cdot P(B)}$,

откуда сразу же получаем, что

(2) $\mathbf{P(B)} = {}^{\mathbf{P(A\,\&\,B)}}/_{\mathbf{P(A)}}$,

где **P(A)** ≠ 0, так как деление на 0 – запрещенная операция.

Величина $^{\mathbf{P(A\,\&\,B)}}/_{\mathbf{P(A)}}$ называется *условной вероятностью.*

Условная вероятность обозначается записью **P(B/A)**, которая читается: «вероятность **B** при условии **A**».

Для формул логики высказываний существует простая процедура вычисления условной вероятности по совместной истинностной таблице для формул **B** и **A**. Из этой таблицы вычеркиваются все строчки, в которых формула **A** принимает значение «ложь», т. е. оставляют только те строчки, где **A** принимает значение «истина» (по крайней мере одна такая строчка должна быть, так как **P(A)** ≠ 0), подсчитывают их число и принимают за *n*. А далее на этих *n* строчках подсчитывают число благоприятных исходов для формулы **B**, получая таким образом число *m*. Величина $^m/_n$ и является условной вероятностью **P(B/A)**. Подсчитаем, например, чему равна **P((p & (q ∨ r))/p ∨ r)**.

p	**q**	**r**	**p & (q ∨ r)**	**p ∨ r**
и	*и*	*и*	*и*	*и*
и	*и*	*л*	*и*	*и*
и	*л*	*и*	*и*	*и*
и	*л*	*л*	*л*	*и*
л	*и*	*и*	*л*	*и*
л	*и*	*л*	*л*	*л*
л	*л*	*и*	*л*	*и*
л	*л*	*л*	*л*	*л*

В таблице вычеркиваются строчки, где формула **p ∨ r** принимает значение «ложь». Оставшиеся 6 строк, на которых условие **p ∨ r** выполнено, дают число *n*. Теперь устанавливаем, на скольких строчках из этих 6-ти оказывается истинной формула **p & (q ∨ r)**. В нашем случае таких строчек 3, т. е. *m* = 3. Отсюда получаем, что условная вероятность формулы **p & (q ∨ r)** есть **P((p & (q ∨ r))/p ∨ r)** = $^1/_2$.

Итак, если **A** и **B** независимы друг от друга, то имеет место равенство:

(3) **P(B) = P(B/A)**.

Если же они зависят друг от друга, то указанное равенство нарушается. При этом оно может нарушаться двояким образом: либо левая величина будет больше правой, либо наоборот. Наиболее интересным является случай, когда **P(B)** < **P(B/A)**, как это имеет место в нашем примере. Последнее говорит о том, что вероятность **B** без учета информации **A** меньше, чем вероятность этого же высказывания при учете **A**, т. е. наличие сведений, фиксируемых высказыванием **A**, увеличивает вероятность истинности **B**.

Учитывая данное соотношение, теперь можно определить *правдоподобное следование* посредством условия:

(4) $\mathbf{A_1,..., A_n} \Vdash \mathbf{B} =_{Df} \mathbf{P(B)} < \mathbf{P(B/A_1} \&...\& \mathbf{A_n})$.

О данном определении говорят, что отношение правдоподобного следования задано с помощью условия *позитивной релевантности.*

В том случае, когда $\mathbf{P(B)} = k$, где k есть некоторая величина в интервале [0, 1], отношение правдоподобного следования можно определить другим условием.

(5) $\mathbf{A_1,..., A_n} \Vdash \mathbf{B} =_{Df} \mathbf{P(B/A_1} \&...\& \mathbf{A_n}) > k$.

В этом случае говорят, что правдоподобное следование определено условием *высокой вероятности.*

Отметим, что иногда отношение правдоподобного следования определяют условием так называемой *обратной дедукции*:

(6) $\mathbf{A_1,..., A_n} \Vdash \mathbf{B} =_{Df} \mathbf{B} \vdash \mathbf{A_1} \&...\& \mathbf{A_n}$,

или, учитывая связь между знаками $\vdash$ и $\vDash$ в первопорядковой логике предикатов, условием:

(7) $\mathbf{A_1,..., A_n} \Vdash \mathbf{B} =_{Df} \mathbf{B} \vDash \mathbf{A_1} \&...\& \mathbf{A_n}$.

Величина $\mathbf{P(B/A_1} \&... \& \mathbf{A_n})$ характеризует как вероятность истинностной оценки предложения **B** при условии справедливости посылок $\mathbf{A_1,..., A_n}$, так и степень связи заключения **B** с данными посылками. Так, рассматривая предыдущий пример, можно сказать, что имеет место правдоподобное следование

$$\mathbf{p \vee r} \Vdash \mathbf{p} \& (\mathbf{q \vee r}))$$

со степенью связи посылки с заключением, равной $^1/_2$. В частном случае, когда $\mathbf{P(B/A_1} \&...\& \mathbf{A_n}) = 1$, связь между посылками и заключением является *достоверной*, т. е. отношение правдоподобного следования в определенном смысле обобщает понятие логического следования, но с одной оговоркой: $\mathbf{P(B/A_1} \&...\& \mathbf{A_n}) \neq 0$, т. е. выражение $\mathbf{A_1} \&... \& \mathbf{A_n}$ не должно быть тождественно-ложным.

§2. Обобщающая индукция

Правдоподобные рассуждения подразделяют на *обобщающую индукцию*, *методы установления причинных зависимостей* (*исключающую индукцию*) и *аналогию*.

Под *обобщающей индукцией* (наведением) понимают такие рассуждения, в которых переходят от знания о некоторых отдельных предметах какого-либо класса к знанию обо всех предметах этого класса, т. е. переходят от единичных утверждений к общим.

Примером обобщающей индукции является следующее рассуждение. Допустим, что некто приехал в незнакомый город и решил зайти в магазин. При этом оказалось, что магазин $\mathbf{a}_1$ в 19 часов был закрыт, магазин $\mathbf{a}_2$ тоже оказался закрытым, это же верно оказалось и для магазина $\mathbf{a}_3$. Тогда, на основе этих данных, приезжий сделал вывод по обобщающей индукции, что все магазины города закрываются в 19 часов.

Различают несколько видов обобщающей индукции – *статистическую* и *нестатистическую*, *полную* и *неполную*, *эмпирическую* и *математическую*, *популярную и научную*. Рассмотрим первоначально нестатистические виды обобщающей индукции. Начнем с полной обобщающей индукции. Она бывает двух типов – эмпирическая и математическая. Схема рассуждения по *полной эмпирической индукции* имеет следующий вид:

$$
\begin{array}{lll}
1. & \mathbf{Q}(\mathbf{a}_1) & \text{– пос.}\\
2. & \mathbf{Q}(\mathbf{a}_2) & \text{– пос.}\\
. & & \text{– пос.}\\
. & & \text{– пос.}\\
. & & \text{– пос.}\\
n. & \mathbf{Q}(\mathbf{a}_n) & \text{– пос.}\\
n{+}1. & \underline{\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2,\ldots, \mathbf{a}_n\} = \mathbf{S}} & \text{– пос.}\\
 & \forall x(\mathbf{S}(x) \supset \mathbf{Q}(x)) &
\end{array}
$$

В первых n посылках фиксируются результаты эмпирической проверки предметов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2,\ldots, \mathbf{a}_n$ на наличие у них интересующего нас свойства $\mathbf{Q}$. Посылки показывают, что каждый проверенный предмет обладает этим свойством. Для полной индукции чрезвычайно важной является $n + 1$-я посылка, указывающая, что множество проверенных предметов в точности составляет класс **S**. Это позволяет сделать *достоверное* заключение о наличии свойства **Q** у всех предметов из **S**.

Достоверность заключения по полной обобщающей эмпирической индукции определяется тем обстоятельством, что условная вероятность высказывания $\forall x(\mathbf{S}(x) \supset \mathbf{Q}(x))$ при данных посылках равна 1. Этот факт можно установить разными способами, и в частности путем подсчета относительной частоты исходов опыта, состоящего в последовательной проверке предметов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ на наличие у них свойства **Q**. Так как класс **S** содержит ровно n предметов, то число всех применявшихся проверочных процедур равно n, из которых число благоприятных случаев тоже равно n. Таким образом, относительная частота $^{n}/_{n} = 1$. Этот результат говорит о том, что в случае полной обобщающей эмпирической индукции между посылками и заключением имеет место отношение логического следования.

Разновидностью полной индукции является так называемая *индукция по построению*, ее частным случаем выступает *математическая индукция* – особые способы рассуждения, используемые в дедуктивных науках (логике и математике). Они применяются в тех случаях, когда исследуемый класс **S** задается (строится) индуктивным определением. Как было показано в главе «Определение», индуктивное определение состоит в том, что первоначально некоторые объекты прямо объявляются принадлежащими данному классу. Все же остальные объекты порождаются из исходных с помощью каких-либо процедур $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_k$. Чтобы доказать теперь общее утверждение о наличии у всех предметов класса **S** свойства **Q**, применяют следующую схему рассуждения:

1.	$\mathbf{Q}(\mathbf{a}_i)$	– базис индукции
2.	$\forall x_1 \ldots \forall x_n((\mathbf{Q}(x_1) \,\&\ldots\&\, \mathbf{Q}(x_n)) \supset \mathbf{Q}(\mathbf{f}_1(x_1, \ldots, x_n)))$	– шаг для $\mathbf{f}_1$
.		– шаг для $\mathbf{f}_2$
.		– шаг для…
.		– шаг для…
k+1.	$\underline{\forall x_1 \ldots \forall x_n((\mathbf{Q}(x_1) \,\&\ldots\&\, \mathbf{Q}(x_n)) \supset \mathbf{Q}(\mathbf{f}_k(x_1, \ldots, x_n)))}$	– шаг для $\mathbf{f}_k$
	$\forall x(\mathbf{S}(x) \supset \mathbf{Q}(x))$,	

где каждый $\mathbf{a_i}$ – это объект, принадлежащий классу **S** по базисному пункту индуктивного определения **S**, а $\mathbf{f_j}$, где $1 \le j \le k$, – это функции, порождающие класс **S** из базисных объектов.

Согласно этой схеме, вначале для исходных объектов $\mathbf{a_i}$ (их может быть много) обосновывают, что они обладают свойством **Q**, т. е. пытаются доказать утверждение, которое называется *базисом индукции по построению*. Далее предполагают, что свойство **Q** выполняется для некоторых произвольных уже построенных объектов $x_1,..., x_n$, т. е. имеет место высказывание $\mathbf{Q}(x_1)$ &...& $\mathbf{Q}(x_n)$ – *индуктивное предположение*. Исходя из данного предположения стремятся осуществить так называемый *индуктивный шаг* – доказать для каждой порождающей функции $\mathbf{f_j}$, что тогда и объект $\mathbf{f_j}(x_1,..., x_n)$, образованный из $x_1,..., x_n$ с помощью порождающей процедуры $\mathbf{f_j}$, тоже обладает свойством **Q**. Если все эти пункты удается обосновать, то, согласно *индукции по построению*, считается, что свойство **Q** присуще всем предметам класса **S**.

С собственно математической индукцией мы имеем дело в том случае, когда множество **S** – это множество натуральных чисел, образованное с помощью того индуктивного определения, которое было рассмотрено в предыдущей главе. Рассуждение в этом случае строится следующим образом:

$$\begin{array}{lll} 1. & \mathbf{Q}(0) & \text{– базис индукции} \\ 2. & \underline{\forall x(\mathbf{Q}(n) \supset \mathbf{Q}(n'))} & \text{– индуктивный шаг} \\ & \quad \forall x\mathbf{Q}(x). & \end{array}$$

Полная эмпирическая индукция является ограниченным познавательным приемом. В эмпирических науках она может применяться лишь в том случае, когда класс **S** конечен и легко обозрим. В наиболее же интересных познавательных ситуациях сплошная проверка предметов просто невозможна. Например, хотя класс рыб, существующих в настоящее время во всех водоемах Земли, конечен, нельзя предложить никакой реально осуществимой процедуры, с помощью которой можно было бы у каждой рыбы установить по схеме полной обобщающей эмпирической индукции наличие некоторого свойства **Q**. Для этого пришлось бы переловить всех рыб, что заведомо невыполнимо.

С другой стороны, имеются и такие случаи, когда класс **S** хотя и конечен, но сплошная его проверка потребовала бы таких огромных затрат, на которые общество не может пойти. Например, достаточно часто и по разным поводам проводятся социологические опросы, но каждый такой опрос требует затрат времени, материальных и людских ресурсов. Ясно, что проведение каждый раз сплошной проверки населения по тому или иному поводу неприемлемо ни по затратам материальных и людских ресурсов, ни по затратам времени – хотя бы по той причине, что к моменту, когда станут известны результаты такой проверки, они уже могут никого не интересовать.

Наконец, сплошная проверка бывает неприемлемой в силу того, что ведет к уничтожению проверяемого предмета. Например, если наша цель – установление доброкачественности партии консервированных продуктов, то каждая проверка, осуществляемая путем вскрытия консервных банок, делает их непригодными к дальнейшему использованию.

Итак, имеются самые разнообразные причины, по которым сплошная проверка бывает невозможной. В таких случаях применяется процедура *неполной обобщающей индукции.* Неполная обобщающая эмпирическая индукция делится на *популярную* и *научную.*

Схема *популярной индукции* имеет следующий вид:

$$\begin{array}{lll}
1. & \mathbf{Q(a_1)} & -\text{пос.} \\
2. & \mathbf{Q(a_2)} & -\text{пос.} \\
. & & -\text{пос.} \\
. & & -\text{пос.} \\
. & & -\text{пос.} \\
n. & \mathbf{Q(a_n)} & -\text{пос.} \\
n+1. & \underline{\{\mathbf{a_1, a_2, \ldots, a_n}\} \subset \mathbf{S}} & -\text{пос.} \\
 & \forall x(\mathbf{S}(x) \supset \mathbf{Q}(x)). &
\end{array}$$

Отличие неполной индукции от полной состоит в n + 1-й посылке. При полной индукции класс $\{\mathbf{a_1, a_2, \ldots, a_n}\}$ в точности совпадал с классом **S**. При индукции же неполной он составляет лишь часть этого класса. Ясно, что истинность заключения $\forall x(\mathbf{S}(x) \supset \mathbf{Q}(x))$ в данном случае является проблематичной, но отнюдь не достоверной. Ведь среди непроверенных предметов могут быть и такие, которые свойством **Q** не обладают.

Пример ложного заключения, полученного посредством популярной индукции, – предложение «Все лебеди белы». Оно, казалось бы, «вытекало» из фактов: каждый раз при наблюдении некоторого конкретного лебедя европейцы убеждались, что он обладает белым цветом. Тем не менее, после открытия Австралии, где были обнаружены черные лебеди, стало ясно, что это индуктивное заключение неверно.

Рассмотренное рассуждение называется популярной (народной, вульгарной) индукцией, потому что оно не замутнено никакими мудрствованиями и осуществляется с детской наивной простотой. Эта простота проявляется прежде всего в том, что на наличие свойства **Q** проверяются первые попавшиеся объекты. После чего проводится *поспешное обобщение* – типичная ошибка индуктивного рассуждения. Однако вывод по неполной индукции можно существенно усовершенствовать и добиться повышения степени надежности получаемых результатов. Для этого необходимо организовать поиск тех предметов, которые в наибольшей степени подтверждали бы, что все предметы из класса **S** обладают свойством **Q**. С этой целью мы должны искать в совокупности **S** не предметы, *которые обладают свойством* **Q**, *а напротив – те предметы*, *которые свойством* **Q** *не обладают*. Ясно, если такая процедура не увенчалась успехом, т. е., проводя по определенной методике всеми доступными нам способами поиск предметов, которым свойство **Q** не присуще, мы все время находим предметы, этим свойством обладающие, то это существенно повышает надежность заключения.

Итак, в случае использования *научной индукции* проверяются на наличие свойства **Q** не первые попавшиеся предметы класса **S** – *генеральной совокупности*, – а те из них, которые специально отобраны для этой цели. В результате такого отбора образуется класс выбранных предметов, который принято называть *выборкой*. Выборка подвергается сплошной проверке, и если проверка на выборке оказывается удачной, т. е. каждый предмет из выборки обладает проверяемым свойством **Q**, то тогда полученный на выборке результат может быть перенесен с достаточно высокой степенью вероятности на всю генеральную совокупность. В этом переносе результата с выборки на всю генеральную совокупность как раз и заключается самая суть *индуктивного обобщения*.

$$
\begin{array}{lll}
1. & \mathbf{Q}(\mathbf{a}_1) & \text{– пос.}\\
2. & \mathbf{Q}(\mathbf{a}_2) & \text{– пос.}\\
. & & \text{– пос.}\\
. & & \text{– пос.}\\
. & & \text{– пос.}\\
n. & \mathbf{Q}(\mathbf{a}_n) & \text{– пос.}\\
n\text{+1}. & \underline{\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2,\ldots, \mathbf{a}_n\} = \mathbf{B}} & \text{– пос.}\\
 & \forall x(\mathbf{B}(x) \supset \mathbf{Q}(x)) & \text{– полная индукция для выборки}\\
n\text{+2}. & \underline{\forall x(\mathbf{B}(x) \supset \mathbf{S}(x))} & \text{– пос.}\\
 & \forall x(\mathbf{S}(x) \supset \mathbf{Q}(x)) & \text{– индуктивное обобщение.}
\end{array}
$$

В схеме посредством **B** обозначена выборка. Поэтому первые n посылок указывают на результат сплошной ее проверки, а первое умозаключение осуществляется по полной обобщающей индукции и касается именно выборки. Далее вводится еще одна, n + 2-я, посылка, которая говорит, что предметы выборки взяты из более широкого класса **S** – генеральной совокупности. Используя это знание, мы и осуществляем окончательный перенос результата на все предметы исследуемого класса **S**.

Наиболее слабым местом в данном рассуждении является переход от утверждения, что все предметы из выборки обладают свойством **Q**, к утверждению, что все предметы генеральной совокупности обладают этим свойством. Для его надежного обоснования требуется, чтобы выборка была *репрезентативной*, т. е. выборка должна достаточно точно передавать качественную структуру класса **S**, разнообразие его состава, в частности те его особенности, которые могут влиять на отсутствие свойства **Q**. Добиться такого структурного соответствия между генеральной совокупностью **S** и выборкой **B**, т. е. добиться репрезентативной выборки, можно следующим способом.

Способ основан на выдвижении некоторых *гипотез* (*предположений*) о том, в силу каких причин у предмета $x \in \mathbf{S}$ может отсутствовать свойство **Q**. Например, если проверяется доброкачественность продукции, выпускаемой пищевой промышленностью (свойство **Q**), то опыт подсказывает, что отсутствие этого свойства может зависеть от срока хранения продукта, от условий его хранения, от того, какое предприятие выпустило продукцию, от партии выпущенной продукции и других параметров. Далее генеральная совокупность логически делится по выбранным параметрам (основание деления) на подклассы – члены деления, и из каждого подкласса выбирается какое-то количество продукции для сплошной ее проверки. Так формируется выборка. При этом если наши гипотезы точно фиксируют все случаи, в силу которых продукция может оказаться недоброкачественной, и если в генеральной совокупности **S** таковая имеется, то в выборку обязательно попадет какое-то ее количество. Этот момент как раз и демонстрирует, каким образом организуется систематический поиск тех предметов из **S**, для которых неверно, что они обладают признаком **Q**.

У данного метода имеются два недостатка. Первый связан с тем, что у нас могут отсутствовать хоть какие-то разумные гипотезы для объяснения свойства **Q**. Второй же состоит в том, что мы можем по тем или иным причинам упустить какой-либо важный параметр, от которого зависит отсутствие свойства **Q**. Тем самым будет делаться определенная систематическая ошибка, которая и приведет к неверным результатам.

Чтобы выборка была репрезентативной, она должна быть достаточно объемной, так как, согласно закону больших чисел, закономерности, которым подчиняются массовые явления, обнаруживаются лишь при достаточно большом числе наблюдений.

Перейдем к рассмотрению *обобщающей статистической индукции*. Она тоже может быть как *полной*, так и *неполной*, как *популярной*, так и *научной*. Далее мы ограничимся изложением только двух вариантов научной статистической индукции, тем более что в составе данных индуктивных рассуждений будут так или иначе представлены и полная, и неполная статистические индукции. Итак, одним из вариантов научной статистической обобщающей индукции является рассуждение, осуществляемое по следующей схеме:

1.	$\mathbf{Q(a_1)}$	– пос.
.		– пос.
.		– пос.
.		– пос.
m.	$\mathbf{Q(a_m)}$	– пос.
m+1	$\neg\mathbf{Q(a_{m+1})}$	– пос.
.		– пос.
.		– пос.

$$
\begin{array}{lll}
\cdot & & \text{– пос.} \\
n. & \neg\mathbf{Q}(\mathbf{a}_n) & \text{– пос.} \\
n{+}1. & \underline{\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\} = \mathbf{B}} & \text{– пос.} \\
 & \forall x(\mathbf{B}(x) \supset \delta(\mathbf{Q}(x)) = \mathrm{k}) & \text{– полная статистическая индукция} \\
n{+}2. & \underline{\forall x(\mathbf{B}(x) \supset \mathbf{S}(x))} & \text{– пос.} \\
 & \forall x(\mathbf{S}(x) \supset \delta(\mathbf{Q}(x)) = \mathrm{k}) & \text{– индуктивное обобщение.}
\end{array}
$$

В схеме знаком **B** обозначена выборка. В первых *n* посылках указаны результаты сплошного обследования предметов из выборки. Посылки показывают, что из *n* проверенных предметов только часть обладает интересующим нас свойством. Пусть таких предметов будет *m*. Тогда устанавливается относительная частота обладания свойством **Q** для произвольного предмета из выборки = $^{m}/_{n}$. Эта информация и фиксируется на первом этапе данного рассуждения в заключении по полной статистической индукции – $\forall x(\mathbf{B}(x) \supset \delta(\mathbf{Q}(x)) = \mathrm{k})$, где k = $^{m}/_{n}$, а далее этот результат индуктивно обобщается на всю генеральную совокупность. Итак, любой объект из генеральной совокупности обладает свойством **Q** с вероятностью, равной k.

По методу статистической индукции осуществляются социологические обследования, где заведомо нереально было бы ожидать, что все люди выскажутся одинаково. Напротив, следует предположить, что на некоторый вопрос один человек ответит «да», а другой – «нет», а потому нестатистические формы индуктивных рассуждений здесь перестают действовать.

При проведении социологических опросов чрезвычайно ответственным действием является предварительное формирование выборки. Чтобы выборка была репрезентативной, в этом случае приходится учитывать такие параметры, как возраст людей, их профессию, образовательный уровень, партийную принадлежность, место жительства, половые различия и т. д. Кроме того, если для получения репрезентативной выборки при нестатистических формах рассуждений достаточно учитывать лишь структурные особенности генеральной совокупности **S**, т. е. учитывать лишь типы предметов, входящих в **S**, то при статистической индукции как количественном методе необходимо также следить за сохранением в выборке процентных соотношений (пропорций) между типами предметов, которые входят в генеральную совокупность. Так, если аграрии в генеральной совокупности составляют 10% населения, а в выборке они представлены в количестве 70%, то такая выборка нерепрезентативна. Ведь наша цель – выяснение мнения всего населения по какому-то вопросу, а не мнения аграриев.

Но и при соблюдении указанных условий статистическая индукция может потерять свой научный характер и стать наукообразной формой фальсификации, если термину «выборка» исследователь склонен придать смысл термина «подборка», так как, в силу наличия у людей различных взглядов, в выборку всегда можно отобрать в непропорционально большом количестве тех из них, кто, высказывая свое мнение, исказит подлинную социологическую картину. Такая подтасовка результатов может произойти и за счет накопления систематической ошибки даже помимо воли самого исследователя.

В этих условиях, чтобы «смягчить» второй недостаток, применяют следующий способ формирования выборки. После проведения разбиения генеральной совокупности на взаимно непересекающиеся классы, выбор предметов из каждого из них осуществляется чисто *случайным* образом, т. е. с помощью метода, обеспечивающего равную вероятность извлечения произвольного элемента генеральной совокупности. Для этого используют специальные таблицы случайных чисел, а сам метод работает следующим образом. Все предметы в каждом из образованных классов нумеруются. Затем берут таблицы случайных чисел и в выборку помещают те предметы из соответствующего класса, номера которых совпадают с числами таблицы. Такая процедура проделывается с каждым выделенным классом в генеральной совокупности. Это гарантирует от неосознанной фальсификации данных. В противном случае заключение, полученное по статистическому рассуждению, нельзя признать научно обоснованным.

И повторим еще раз – даже при учете всех этих факторов выборка может оказаться нерепрезентативной, если она оказывается недостаточно объемной.

В практике социологических обследований часто используется еще один вариант статистической индукции, так как на один и тот же вопрос может быть получено не два ответа – «да» или «нет», а несколько различных ответов – $Q_1, Q_2, \ldots, Q_r$. Тогда схема рассуждения по статистической индукции строится следующим образом:

1.	$\mathbf{Q}_1(\mathbf{a}_1)$	– пос.	
.		– пос.	
.		– пос.	
.		– пос.	
m.	$\mathbf{Q}_1(\mathbf{a}_m)$	– пос.	
.		– пос.	
.		– пос.	
.		– пос.	
r+1	$\mathbf{Q}_r(\mathbf{a}_{r+1})$	– пос.	
.		– пос.	
.		– пос.	
.		– пос.	
n.	$\mathbf{Q}_r(\mathbf{a}_n)$	– пос.	
n+1.	$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\} = \mathbf{B}$		– пос.
	$\forall x(\mathbf{B}(x) \supset \delta(\mathbf{Q}_i(x)) = k_i)$		– полная статистическая индукция
n+2.	$\forall x(\mathbf{B}(x) \supset \mathbf{S}(x))$		– пос.
	$\forall x(\mathbf{S}(x) \supset \delta(\mathbf{Q}_i(x)) = k_i)$		– индуктивное обобщение,

где $1 \leq i \leq r$, а k_i – относительная частота проявления свойства $\mathbf{Q}_i$ в выборке. Заключение этого рассуждения имеет следующий смысл: любой предмет из генеральной совокупности $\mathbf{S}$ с вероятностью k_i обладает свойством $\mathbf{Q}_i$. Ясно, что для достижения репрезентативности выборка в данном случае должна быть более объемной, чем в простом варианте статистической индукции.

Практика применения научных форм индукции показывает, что при соблюдении всех предосторожностей от различных возможных вольных или невольных ошибок при формировании выборки надежность этих рассуждений может приближаться к 100%.

§3. Причинная зависимость

Одной из разновидностей индукции, которая называется *исключающей индукцией*, являются *методы установления причинных зависимостей*, когда на основании некоторых эмпирических данных между двумя массовыми событиями (часто говорят «явлениями») x и y устанавливается отношение *причинной* (*каузальной*) связи, состоящей в том, что существование события (явления) x обусловливает существование события (явления) y. Будем в таком случае говорить, что «x каузально влечет y», и записывать это утверждение в форме «$x \ni y$», где x называется *причиной*, y – *следствием*, или *действием* этой причины, а знак «$\ni$» – *каузальной импликацией*. Например, такое событие, как удар камнем по стеклу, явилось причиной другого события – стекло оказалось разбитым; приложение напряжения к проводнику явилось причиной возникновения в проводнике электрического тока; нагревание чайника с водой явилось причиной того, что вода в чайнике закипела; гравитационное взаимодействие двух тел явилось причиной их взаимного притяжения и т. д.

Существование в объективной действительности *каузальных* связей определяется наличием в природе различного рода сил, при непосредственном участии которых одни тела оказывают воздействие на другие. К числу таких воздействующих факторов относятся различного рода соударения, тепловые, гравитационные, электромагнитные, химические и другие воздействия. Любое такое воздействие некоторого фактора на объект **a** связано с передачей ему энергии или вещества. В ответ на воздействие подобного рода объект **a** определенным образом реагирует, причем спектр ответных реакций может быть очень разнообразным: **a** может изменить какие-то свои свойства, изменить свое состояние, превратиться в новый объект **b**, породить целый ряд новых объектов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$, вступить в какие-то отношения с другими объектами и т. д. Графически данную ситуацию можно изобразить Схемой 1:

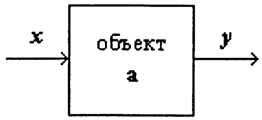


Схема 1

На схеме квадратом изображен объект **a**, стрелкой x изображен воздействующий на **a** фактор, а стрелкой y обозначена ответная реакция **a** на воздействие x.

Из рассмотрения данной схемы вытекает, что любой фактор, способный воздействовать на некоторый предмет и вызвать его ответную реакцию, можно понимать как причину этой реакции. Например, причиной образования льда в чайнике с водой является воздействие на воду холода, а причина заболевания малярией – укус человека малярийным комаром. В этих примерах действие холода и укус являются воздействующими факторами. Так понимаемая причина называется в науке *действующей причиной* и является наиболее фундаментальной ее разновидностью, так как все остальные виды причинения выступают как дополнительные факторы, осуществляющие свое влияние на фоне действующей причины. Рассмотрим характерные особенности причинной связи.

1. Действующая причина всегда обладает *активностью* по отношению к своим следствиям, которые она порождает. Этим каузальная связь существенно отличается от других видов *обусловленности* (*детерминации*). Так, при осуществлении логического вывода заключение детерминировано наличием посылок и правил вывода, но сами по себе последние не порождают заключения. Приводят в действие посылки и правила вывода человек; именно он проявляет активную форму поведения. Действующая же причина сама по себе творит свои следствия.

2. Активный характер действующей причины всегда осуществляется за счет потока вещества и энергии. Но, в соответствии с современными физическими теориями, передача вещества и энергии происходит с конечной скоростью, не превышающей скорости света, а потому действующая причина должна по времени *предшествовать* своему следствию. Это предшествование может быть сколь угодно малой величиной, но оно всегда имеет место. Так, при ударе по покоящемуся бильярдному шару другим шаром нам кажется, что покоящийся шар пришел в движение одновременно с соударением. На самом же деле замедленная съемка показывает, что имеется определенный временной разрыв между моментом соударения и началом движения покоящегося шара. Однако при практическом решении вопроса о наличии каузальной связи между x и y наибольшую трудность представляют не случаи их практически одновременного проявления, а как раз случай временного разрыва, когда x воздействовал на **a** в некоторый момент **t**, а y осуществилось значительно позднее: ведь за это время на **a** могли подействовать и многие другие факторы, среди которых как раз и может оказаться подлинная причина появления y. Итак, причина и действие находятся в отношении временной последовательности, а потому поиск причины для y всегда следует вести среди *предшествующих* наступлению *y обстоятельств*.

Однако не любая временная последовательность событий является каузальной. Так, за днем всегда наступает ночь, но это не значит, что день является причиной ночи. Некритическое отношение к обнаруженной временной последовательности двух событий ведет к типичной для причинных рассуждений ошибке *поспешного установления каузальной связи*, известной в логике как ошибка «*вслед за этим – значит по причине этого*». Данная ошибка лежит в основе многих суеверий (причиной моего несчастья явилось то, что перед этим черная кошка перебежала мне дорогу), а также различного рода антинаучных построений, например построения астрологических гороскопов.

3. Из Схемы 1 можно усмотреть, что порождение следствия y действующей причиной x опосредовано объектом **a**, перерабатывающим фактор x в ответную реакцию y. Последнее осуществляется за счет работы некоего внутреннего механизма, присущего **a** и определяемого структурой объекта. Иногда этот механизм известен в деталях, иногда же он неизвестен. В последнем случае говорят, что **a** представляет собой «*черный ящик*», т. е. объект со скрытым от нас механизмом работы. Так, задаваясь вопросом, почему данное ружье выстрелило, можно было бы ответить, что причиной выстрела явилось нажатие на спусковой крючок. Последнее событие рассматривается как воздействующий на ружье (объект **a**) фактор x. Но чтобы это воздействие породило следствие y (выстрел), в ружье должна произойти некоторая последовательность событий: после нажатия на спусковой крючок боевая пружина распрямилась и привела в движение курок, последний воздействовал на боек, который ударил по капсюлю, содержащему гремучую ртуть, взрыв которого поджег порох, а уже давление пороховых газов вытолкнуло из ствола заряд дроби.

Каждое событие, входящее в эту последовательность, называемую *цепью причинения*, является, с одной стороны, *непосредственным* (*ближайшим*) *следствием* предшествующего события, а с другой – *непосредственной* (*ближайшей*) *действующей причиной* следующего события. Так, ближайшим следствием нажатия на спусковой крючок было распрямление боевой пружины. Последнее же в свою очередь было ближайшей действующей причиной движения курка и т. д. Итак, нажатие на спусковой крючок – вовсе не ближайшая причина выстрела, а является причиной *отдаленной*, т. е. причиной, действующей через некоторую последовательность промежуточных каузальных связей.

Любое из событий в цепи причинения с не меньшим основанием, чем нажатие на спусковой крючок, может быть названо действующей причиной выстрела. Поэтому всякий раз вопрос о том, что является причиной события *y*, зависит, во-первых, от наличия у нас уже определенных знаний о каузальных связях, и, во-вторых, от тех познавательных задач, которые ставятся. Так, если механизм работы ружья неизвестен, то в ответ на вопрос, почему ружье выстрелило, естественно будет указать на то предшествующее событие (обстоятельство), которое в наиболее наглядной форме выступает как причина этого явления, – нажатие на спусковой крючок. Но установив данную казуальную связь, можно продолжить анализ и задать следующий вопрос: а почему нажатие на спусковой крючок привело к выстрелу? Тем самым ставится задача отыскать причину наличия самой причинной связи. Допустим, что ответ был таков: причиной наличия этой связи является движение курка. Но тогда можно поставить новые два вопроса. С одной стороны, постараться выяснить, что является причиной наличия каузальной связи между нажатием спускового крючка и движением курка, а с другой – почему движение курка привело к выстрелу. Ответы на все эти «почему» постепенно раскрывают весь механизм работы ружья и тем самым дают ответ на вопрос «как» – как работает ружье.

4. Наличие определенной внутренней структуры у объекта **a** может либо способствовать появлению следствия *y* в ответ на воздействие *x*, либо воспрепятствовать этому. Так, чтобы осуществить выстрел, ружье должно быть взведено, боевая пружина и курок должны быть способны работать в определенном режиме, боек должен быть не сточен, в ружье должен находиться патрон в не перекошенном состоянии, порох в патроне должен быть сухим и т. д. Без наличия всех этих условий каузальная связь не осуществится, а потому каждое из них можно трактовать тоже как причину выстрела. Но эти причины особые, указывающие на определенную структуру объекта, его форму, а потому они называются *формальными причинами*.

Формальная причина сама по себе не вызывает действие, не обладает активностью, как это свойственно действующей причине, но она является необходимым условием того, чтобы действующая причина сработала. В самом деле, активность действующей причины связана с передачей вещества и энергии. Формальная же причина либо способствует этому процессу, либо препятствует ему. Если ружье испорчено, скажем стесан боек, то попытка выстрелить из такого ружья не приведет к успеху, и на вопрос, почему ружье не стреляет, естественно будет ответить – потому что стесан боек. В данном случае в качестве причины отсутствия выстрела указывают именно на формальную, а не на действующую причину. Почему не работает телевизор? Потому что сгорел трансформатор (перегорел предохранитель, пробит конденсатор и т. д.). Все это – формальные причины.

Приведенные примеры демонстрируют те каузальные ситуации, когда наличие формальных причин способствует осуществлению некоторого каузального процесса переноса энергии и вещества, а отсутствие хотя бы одного из формальных условий ведет к его нарушению. Но бывают и иного рода случаи, когда отсутствие некоторого условия способствует осуществлению процесса, а его наличие препятствует этому. Например, на вопрос, что явилось причиной самопроизвольного спуска под уклон железнодорожного вагона, можно ответить – отсутствие тормозных колодок. Или: что является причиной отсутствия падения подвешенного груза? Наличие нити, на которой этот груз подвешен. Указанные ситуации можно графически изобразить Схемой 2:

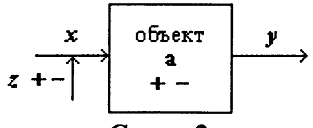


Схема 2

На схеме знаками «+» и «–», помещенными в квадрат, обозначающий объект **а**, показано, что механизм переработки фактора x в реакцию y может находиться в двух состояниях – способствующем каузальной связи «$x \Supset y$» (знак «+») и препятствующем этой связи (знак «–»). Стрелкой z показан еще один, внешний по отношению к объекту **а** фактор, который также либо способствует каузальной связи, либо блокирует ее.

5. Часто наступление события y происходит только при совместном действии нескольких причин. В этом случае принято говорить о *сложной причине* события y. Например, пусть имеется исправный радиоприемник, т. е. все формальные условия для прослушивания

радиопередачи, связанные с приемником, наличествуют. Допустим далее, что мы желаем послушать передачу по радиоканалу «Би-Би-Си». Причиной осуществления данного события является сложный фактор, состоящий из осуществления четырех действующих и формальных причин: радиоприемник включен в сеть, радиоканал «Би-Би-Си» в данное время работает на определенной частоте, осуществлена настройка приемника на данную частоту, радиоприемник исправен. Схема этого случая графически может быть представлена следующим образом:

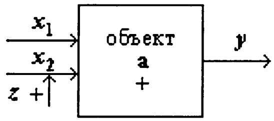


Схема 3

Рассмотрим еще один пример. Допустим, что расследуется причина автомобильной катастрофы. В ходе расследования выяснилось, что данному событию предшествовали следующие обстоятельства: машина двигалась с большой скоростью, перед этим прошел дождь и асфальт был мокрым, погода стояла пасмурная и была плохая видимость, тормозное устройство машины было неисправно, шофер находился в утомленном состоянии и потому его реакции были замедленными, к тому же он был нетрезв. Можно ли из указанных обстоятельств вычленить одно и сказать, что именно это обстоятельство и никакое иное явилось причиной автомобильной катастрофы? Вряд ли! В данном случае следует говорить о совокупности, сложной причине события, когда каждое из перечисленных обстоятельств внесло свою лепту в наступление дорожного происшествия. Здесь и формальные, и действующие причины в одинаковой мере участвовали в наступлении события.

6. Принято различать два вида каузальной связи между причиной x и следствием y. С одной стороны, каузальную связь, носящую жесткий, однозначный характер, когда всякий раз при наличии формальных условий и наличии причины x с необходимостью возникает (порождается) следствие y. В этом случае говорят, что причинная связь между x и y носит *динамический характер*. С другой стороны, обусловленность y причиной x может быть и не однозначно жесткой, а лишь статистически вероятностной, т. е. при наличии x следствие y

осуществляется лишь с определенной степенью вероятности. В этом случае говорят, что каузальная связь между x и y носит *статистический характер.*

7. С логической точки зрения различают несколько трактовок понятия причины. Иногда о событии x говорят как о причине y, если осуществление x является *достаточным условием* последующего осуществления y. Это означает: всякий раз, т. е. в какой бы пространственно-временной точке ни осуществилось x, если в наличии имеются все формальные условия, то имеется некоторый естественный пространственно-временной интервал, определяемый скоростью развития процесса, такой что в рамках этого интервала осуществится и событие y. Если посредством буквы **t** обозначить пространственно-временную точку, посредством [**T**] – пространственно-временной интервал, через x_{t} выразить условие наступления события x в точке **t**, а через $y_{[\mathrm{T}]}$ – условие наступления события y в интервале [**T**], то сказанное можно записать в виде выражения – $\forall \mathbf{t} \exists [\mathbf{T}](x_{\mathrm{t}} \supset y_{[\mathrm{T}]})$. Упрощая это выражение, можно ввести следующее понимание причинности:

$$\mathbf{Df_1}\text{: } x \Supset y \equiv_{\mathrm{Df}} \text{Всякий раз } (x \supset y).$$

Другое понятие причины связано с его пониманием как *необходимого условия* для наступления следствия. Словесная формулировка такого понимания звучит следующим образом: всякий раз, т. е., какой бы ни была пространственно-временая точка, если событие x не осуществилось в этой точке, то при наличии всех формальных условий имеется некоторый естественный пространственно-временной интервал, определяемый скоростью развития процесса, такой что в рамках этого интервала событие y не осуществится. Иначе говоря, справедливым должно быть утверждение вида – $\forall \mathbf{t} \exists [\mathbf{T}](\neg x_{\mathrm{t}} \supset \neg y_{[\mathrm{T}]})$. При упрощении этого выражения данное понимание причины можно записать так:

$$\mathbf{Df_2}\text{: } x \Supset y \equiv_{\mathrm{Df}} \text{Всякий раз } (\neg x \supset \neg y).$$

Третье понимание причины трактует ее как такое событие, которое удовлетворяет одновременно как *условию достаточности*, так и *условию необходимости:* $\forall \mathbf{t} \exists [\mathbf{T}](x_{\mathrm{t}} \equiv y_{[\mathrm{T}]})$. Это позволяет сформулировать следующее определение:

$$\mathbf{Df_3}: x \Supset y \equiv_{\mathrm{Df}} \text{Всякий раз } (x \equiv y).$$

Наконец, часто причину понимают как *событие, модификация (отсутствие модификации) которого влечет за собой модификацию (отсутствие модификации) следствия.* Такое понимание предполагает, с одной стороны, что модификация причины, – достаточное условие модификации следствия, а с другой – отсутствие модификации причины будет влечь за собой отсутствие модификации следствия. Определение в этом случае будет таким:

$$\mathbf{Df_3}: x \Supset y \equiv_{\mathrm{Df}} \text{Всякий раз } (x' \equiv y'),$$

где x' и y' – это модифицированные x и y (или их усиление, или ослабление).

8. При поиске причинных зависимостей можно поступать (и обычно поступают) трояким образом: (а) либо у нас нет разумных гипотез о том, что явилось причиной наступления события y, и мы ищем его причину в предшествующих обстоятельствах; (б) либо мы заранее предполагаем, что некоторые обстоятельства являются возможными причинами наступления y, и мы проверяем, какое из этих обстоятельств есть подлинная причина; (в) либо, зная x и y, пытаемся выяснить, связаны ли они каузально.

В первом случае, при отсутствии у нас каких-либо соображений о конкретной причине события y, или если мы по тем или иным основаниям не можем по своему усмотрению воспроизвести его, эмпирическое исследование y ведется в его естественных, природных условиях проявления. Именно так осуществляют зачастую свои исследования натуралисты – ботаники, зоологи, геологи, астрономы и др. Методом исследования в этом случае является простое *наблюдение* за поведением объекта и протоколирование наблюдаемых последовательностей событий. В данной ситуации, пытаясь обнаружить причину y, мы вынуждены просматривать различные обстоятельства, предшествующие наступлению y. Но число факторов $x_1, x_2,...$, влияющих на объект **a**, когда он находится в естественных условиях, очень велико, и среди них мы должны выделить тот фактор x_i, который породил y.

В тех же случаях, когда у нас имеется предположение о некотором x как о причине наступления y и мы можем его по своему усмотрению воспроизводить, применяется более сложная форма исследования, называемая *экспериментом* (*опытом*). При проведении эксперимента исследователь активно вмешивается в ход процесса, старается осуществить его в различных условиях. Главное достоинство эксперимента состоит в том, что здесь возможно контролировать каждый фактор, влияющий на поведение объекта **a**. Для этого эксперименты часто осуществляют в специально созданных искусственных условиях (на специальных установках), когда объект **a** изолируется от различных побочных воздействий. Так, И. П. Павлов, чтобы исключить побочные воздействия, осуществлял свои опыты по выработке у животных условных рефлексов в специально построенном здании, которое было оборудовано звуконепроницаемыми комнатами.

Наконец, в третьем случае мы осуществляем так называемую корреляцию взаимосвязи x и y. Как это конкретно происходит, будет рассмотрено далее.

Почти во всех случаях установления причинных зависимостей всегда остается одно сомнение относительно справедливости получаемого заключения. Оно связано с допущением наличия некоторых скрытых параметров, которые по каким-то причинам выпали из поля нашего зрения, присутствуют во всех наблюдаемых случаях и являются подлинной причиной наступления интересующего нас события. Наличие скрытых параметров всегда обусловлено некоторыми особенностями проведения наблюдения или эксперимента, в частности особенностями экспериментальных установок, используемых в опыте, которые систематически влияют на получаемые результаты. Чтобы ликвидировать влияние такой систематической ошибки, любой эксперимент или наблюдение проверяют на разных экспериментальных установках или осуществляют в каких-то иных условиях внешней среды. Это гарантирует, что мы не столкнемся с одними и теми же скрытыми параметрами, а потому, даже если такие параметры присутствуют, они должны оказывать различные действия. Получая теперь одни и те же результаты в разных условиях проведения наблюдений или экспериментов, мы можем считать себя застрахованными от влияния скрытых параметров.

Тем не менее всегда бывает желательно каким-то способом удостовериться в правильности тех заключений о причинах наступления события y, которые мы делаем, применяя методы установления причинных зависимостей. Это можно сделать как экспериментально, так и теоретически. Что здесь имеется в виду, будет объяснено ниже.

§4. Методы установления причинных связей

Приступим к рассмотрению *исключающей индукции* – одному из важнейших методов экспериментального научного познания. Собственно говоря, все наши успехи в области улучшения условий нашего существования обусловлены применением именно этого метода.

> ***Исключающая индукция*** **– это умозаключение, посредством которого устанавливается причина наступления события q путем исключения из предшествующих q обстоятельств тех из них, которые не могут быть причиной наступления события q.**

При применении исключающей индукции (часто неявно) используют несколько основополагающих *принципов элиминации* предшествующих обстоятельств, в силу чего данная разновидность индукции и называется исключающей. Перечислим их.

(1) Если в нашем распоряжении имеются полученные в опыте сведения, что при отсутствии события **A** событие **q** все же осуществилось (**¬A – q**), то считается, что событие **A** не является причиной события **q**.

(2) Если всякий раз в нашем распоряжении имеются полученные в опыте сведения, что при наступлении события **A** событие **q** как происходит (**A – q**), так и не происходит (**A – ¬q**), то можно предположить влияние на наступление события **q** некоторого побочного обстоятельства, блокирующего действие подлинной причины, которой является как раз фактор **A**.

(3) Если в нашем распоряжении имеются полученные в опыте сведения, что при отсутствии модификации фактора **A** событие **q** модифицируется, то считается, что событие **A** не является причиной события **q**.

(4) Если всякий раз в нашем распоряжении имеются полученные в опыте сведения, что при модификации фактора **A** событие **q** не модифицируется, то считается, что событие **A** не является причиной события **q**.

Метод сходства. Различают несколько методов установления причинных зависимостей. Одним из них является *метод сходства.* В соответствии с этим методом, для отыскания причины некоторого явления обращаются к предшествующим событиям (обстоятельствам, факторам) и пытаются среди них обнаружить тот общий фактор, который всегда присутствует перед наступлением интересующего нас явления. Отыскание этого общего фактора осуществляется за счет элиминации всех тех предшествующих обстоятельств, которые заведомо не являются причинами наступления интересующего нас события.

Допустим, что в некотором населенном пункте **N** произошло острое пищевое отравление нескольких человек. Желательно предотвратить дальнейшее отравление людей, а потому необходимо установить, что явилось причиной этого события, найти его источник. Для этого поступают следующим образом: пытаются установить, какие продукты употребляли отравившиеся люди. Если среди продуктов найдется только один, употреблявшийся каждым из числа отравившихся, то прием в пищу именно данного продукта и считается причиной явления. Обозначив большими латинскими буквами **A**, **B**, **C**,... различные пищевые продукты, а через **q** – факт отравления некоторого человека, можно построить, например, такую таблицу:

люди	предшествующие обстоятельства							наблюдаемое явление
	A	**B**	**C**	**D**	**K**	**L**	**M**	
Иванов	+	+	+	–	–	–	–	q
Петров	+	–	+	+	–	–	–	q
Сидоров	+	–	–	–	+	+	+	q

Таблица показывает, что, согласно первому принципу элиминации обстоятельств, которые претендуют на признание их в качестве причины явления **q**, мы должны отказать в этом обстоятельствам **B**, **C**, **D**, **K**, **L** и **M**. Единственным неисключенным и сходным обстоятельством во всех трех случаях отравления является употребление заболевшими продукта **A**. Отсюда с определенной долей проблематичности делается вывод, что причиной отравления стало употребление в пищу продукта **A**.

Каждый раз при установлении причинной связи большую роль играет предварительное знание или предположение о возможной области поиска причины исследуемого события. Так, в случае с отравлением мы заранее предположили (а может быть, и знали), что причиной заболевания явилось именно пищевое отравление, а не действие каких-то иных факторов. Это направило наше внимание на выявление тех продуктов, которые употреблялись больными. Тем самым был существенно сужен поиск возможных факторов влияния. Если бы этого предположения не было, то нам пришлось бы анализировать и другие возможные причины, скажем, воздействие каких-то физических факторов или химических веществ и т. д.

Обозначим через $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}_1,\ldots, \mathbf{B}_m$, $\mathbf{C}_1,\ldots, \mathbf{C}_k$ факторы, предшествующие исследуемому явлению (возможные причины его наступления). Тогда рассуждение по методу сходства можно представить следующей схемой:

1.	$\mathbf{A}, \mathbf{B}_{i1}, \mathbf{C}_{j1}$	$-\mathbf{q}$	– наблюдаемый факт
2.	$\mathbf{A}, \mathbf{B}_{i2}, \mathbf{C}_{j2}$	$-\mathbf{q}$	– наблюдаемый факт
.	.	$-\mathbf{q}$	– наблюдаемый факт
.	.	$-\mathbf{q}$	– наблюдаемый факт
.	.	$-\mathbf{q}$	– наблюдаемый факт
n.	$\mathbf{A}, \mathbf{B}_{in}, \mathbf{C}_{jn}$	$-\mathbf{q}$	– наблюдаемый факт

Во всех данных случаях ($\mathbf{A} \supset \mathbf{q}$) – описание фактов

Всякий раз ($\mathbf{A} \supset \mathbf{q}$) – индуктивное обобщение

$\mathbf{A} \Supset \mathbf{q}$ – по $\mathbf{Df}_1$ причины,

где $1 \leq \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2,\ldots, \mathbf{i}_n \leq \mathrm{m}$ и $1 \leq \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2,\ldots, \mathbf{j}_n \leq \mathrm{k}$.

Рассмотрим более подробно данный метод рассуждения. Здесь, исходя из актов наблюдения, первоначально строится чисто фактуальное обобщение относительно рассмотренных случаев. Далее полученный результат индуктивно распространяется на любое наблюдение, которое когда-либо может быть осуществлено и будет сходно с рассмотренными ситуациями по наличию фактора **A**. На заключительной стадии, используя определение причины как достаточного условия, делают окончательное заключение о том, что **A** – причина события **q**.

Получаемые по методу сходства заключения являются в общем случае лишь проблематическими, а не достоверными, что обусловлено рядом обстоятельств. Прежде всего это касается числа фактуальных посылок: всегда бывает желательно расширить круг наблюдений, что повышает надежность заключения. Но если даже число фактуальных посылок существенно увеличено, остается все же сомнение, связанное с допущением наличия скрытого параметра (например, фактора **F**), который выпал из нашего поля зрения, хотя он-то и является подлинной причиной события **q**.

Продемонстрируем теперь, как можно удостовериться в правильности сделанного заключения. С этой целью можно, выделив фактор **A**, осуществить прямую эмпирическую проверку, может ли он вызвать явление **q**. Для этого нужно взять какое-то количество продукта **A** для химико-биологического анализа. Если анализ покажет, например, зараженность его каким-либо болезнетворным микробом, то тем самым напрямую будет обоснована верность заключения.

Метод сходства применяется главным образом как метод наблюдения, а не эксперимента. Неудобство сочетания этого метода с экспериментом определяется тем, что в этом случае пришлось бы, фиксируя один фактор, варьировать присутствие или отсутствие большого числа других факторов. Но одно дело, когда такое варьирование осуществляется самой природой, а на нашу долю остается лишь констатировать наличие этих вариаций, и совершенно другое – когда такие вариации должны быть произведены самим экспериментатором. В последнем случае удобнее поступить иначе: зафиксировать некоторое множество обстоятельств так, чтобы они не менялись, и начать варьировать («включать» или «выключать») одно вполне определенное обстоятельство.

Метод различия. Такой подход приводит нас к более сильному методу установления причинных зависимостей – *методу различия.*

Его логическая схема выглядит следующим образом:

1.	$\mathbf{A}, \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_m$	$- \mathbf{q}$	– наблюдаемый факт
.		$- \mathbf{q}$	– наблюдаемый факт
.		$- \mathbf{q}$	– наблюдаемый факт
.		$- \mathbf{q}$	– наблюдаемый факт
k.	$\mathbf{A}, \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_m$	$- \mathbf{q}$	– наблюдаемый факт
k+1.	$\neg\mathbf{A}, \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_m$	$- \neg\mathbf{q}$	– наблюдаемый факт
.		$- \neg\mathbf{q}$	– наблюдаемый факт
.		$- \neg\mathbf{q}$	– наблюдаемый факт
.		$- \neg\mathbf{q}$	– наблюдаемый факт

$$
\textit{n.}\quad
\begin{array}{ll}
\underline{\neg\mathbf{A},\ \mathbf{B}_1,\ldots,\ \mathbf{B}_m \qquad -\neg\mathbf{q}} & \text{– наблюдаемый факт} \\
\underline{\text{Во всех данных случаях}}\ (\neg\mathbf{A} \supset \neg\mathbf{q}) & \text{– описание фактов} \\
\underline{\text{Всякий раз}\ (\neg\mathbf{A} \supset \neg\mathbf{q})} & \text{– индуктивное обобщение} \\
\qquad\quad \mathbf{A} \ni \mathbf{q} & \text{– } \mathbf{Df}_2 \text{ причины.}
\end{array}
$$

Метод различия – экспериментальный метод. Его применение состоит в осуществлении экспериментальных ситуаций двух типов, из которых в одной явление **q** исследуется в присутствии некоторого предшествующего обстоятельства **А**, а в другой – это обстоятельство изымается из числа воздействующих факторов при сохранении всех других. Таким образом, два типа эксперимента различаются единственным обстоятельством, а исключение предшествующих обстоятельств $\mathbf{B}_1,\ldots,\mathbf{B}_m$ осуществляется по принципу (3) элиминации.

Именно этим методом было установлено, что причиной несовпадения скорости падения тел с различным весом является наличие воздуха. Для этого проводились следующие эксперименты. В длинный стеклянный сосуд, соединенный с воздушным насосом, помещают два предмета различного веса, например стальной шарик и легкое птичье перышко, и проводят первое исследование в присутствии воздуха: сосуд переворачивают и наблюдают, что стальной шарик под действием силы тяжести падает быстрее, чем легкое перышко. Затем из сосуда выкачивают воздух и опыт повторяют. Оказывается, без присутствия воздуха и шарик, и перышко падают с одинаковой скоростью. Отсюда по методу различия заключают, что сопротивление воздуха ведет к несовпадению скоростей падения тел различного веса.

Метод различия – это очень мощный метод. Однако заключение, полученное по методу различия, является в общем случае проблематичным, так как и с ним также связано сомнение относительно наличия скрытых параметров. Но так как метод различия является экспериментальным методом, то повторение экспериментов на других установках позволяет ликвидировать сомнение в наличии скрытых параметров. Методу различия присуща и еще одна специфическая трудность. В силу сохранения обстоятельств $\mathbf{B}_1,\ldots,\mathbf{B}_m$ во всех экспериментах, остается сомнение, не является ли причиной наступления **q** не обстоятельство **А**, а некоторое сложное обстоятельство, например – $\mathbf{A}\ \&\ \mathbf{B}_1$. Чтобы элиминировать это допущение, требуется осуществить дальнейшее исследование причинной зависимости. Так, если удастся построить эксперимент, результат которого будет иметь вид:

$$\mathbf{A}, \neg \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_m - \mathbf{q},$$

где $\neg \mathbf{B}_1$ означает, что обстоятельство $\mathbf{B}_1$ отсутствует, то это сразу же по принципу (1) элиминации предшествующих обстоятельств исключит предположение о совместном действии **A** и $\mathbf{B}_1$ в качестве причины **q**, ибо событие **q** осуществляется и без участия $\mathbf{B}_1$.

Совместный метод сходства и различия. Еще одним методом установления причинных зависимостей является *совместный метод сходства и различия*, применяемый в тех случаях, когда у нас отсутствуют разумные соображения о возможной причине исследуемого явления, а разнообразие факторов, могущих претендовать на эту роль, чрезвычайно велико.

Пусть, как и ранее, **A**, $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_m$, $\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_k$ будут предшествующими обстоятельствами, претендующими на роль возможной причины наступления некоторого события. Тогда схему рассуждения по этому методу можно представить в следующей форме:

1.	$\mathbf{A}, \mathbf{B}_{i1}, \mathbf{C}_{j1}$	$-\,\mathbf{q}$	– наблюдаемый факт
.		$-\,\mathbf{q}$	– наблюдаемый факт
.		$-\,\mathbf{q}$	– наблюдаемый факт
.		$-\,\mathbf{q}$	– наблюдаемый факт
m.	$\mathbf{A}, \mathbf{B}_{im}, \mathbf{C}_{jm}$	$-\,\mathbf{q}$	– наблюдаемый факт
m+1.	$\neg\mathbf{A}, \mathbf{B}_{im+1}, \mathbf{C}_{jm+1}$	$-\,\neg\mathbf{q}$	– наблюдаемый факт
.		$-\,\neg\mathbf{q}$	– наблюдаемый факт
.		$-\,\neg\mathbf{q}$	– наблюдаемый факт
.		$-\,\neg\mathbf{q}$	– наблюдаемый факт
n.	$\neg\mathbf{A}, \mathbf{B}_{in}, \mathbf{C}_{jn}$	$-\,\neg\mathbf{q}$	– наблюдаемый факт

$\mathbf{A}, \mathbf{B}_{i1}, \mathbf{C}_{j1}$	$-\,\mathbf{q}$	*m*+1.	$\neg\mathbf{A}, \mathbf{B}_{im+1}, \mathbf{C}_{jm+1}$	$-\,\neg\mathbf{q}$	– разделение фактов
	$-\,\mathbf{q}$	.		$-\,\neg\mathbf{q}$	– разделение фактов
	$-\,\mathbf{q}$	.		$-\,\neg\mathbf{q}$	– разделение фактов
	$-\,\mathbf{q}$	.		$-\,\neg\mathbf{q}$	– разделение фактов
$\mathbf{A}, \mathbf{B}_{im}, \mathbf{C}_{jm}$	$-\,\mathbf{q}$	*n*.	$\neg\mathbf{A}, \mathbf{B}_{in}, \mathbf{C}_{jn}$	$-\,\neg\mathbf{q}$	– разделение фактов

Во всех случаях ($\mathbf{A} \supset \mathbf{q}$) | Во всех случаях ($\neg\mathbf{A} \supset \neg\mathbf{q}$) – описание фактов

Во всех рассмотренных случаях ($\mathbf{A} \equiv \mathbf{q}$) – определение $\equiv$

Всякий раз ($\mathbf{A} \equiv \mathbf{q}$) – индуктивное обобщение

$\mathbf{A} \Supset \mathbf{q}$ – $\mathbf{Df}_3$ причины.

При рассмотрении данной схемы может создасться превратное представление об ее излишней сложности. Казалось бы, вывод о том, что обстоятельство **A** является причиной **q**, можно получить из первых *m* опытных данных по методу сходства. И это было бы действительно так, если бы у нас уже имелось заранее предположение, что именно фактор **A** есть причина **q**. Тогда данное предположение можно было бы последовательно проверять, строя наблюдения таким образом, чтобы фактор **A** все время присутствовал, а все остальные обстоятельства изменялись. Однако когда заранее никаких предположений относительно возможной причины **q** нет, исследователь вынужден накапливать как можно больше экспериментального материала с двумя возможными исходами – присутствия **q** и отсутствия его. Далее весь этот материал разбивается (в чем и состоит использование метода различия) по принципу присутствия и отсутствия **q** на две группы – на наблюдения, когда событие **q** присутствует, и наблюдения, когда это событие отсутствует, после чего становится естественным предположить, что осуществление **q** в первой группе опытов и неосуществление во второй связано с каким-то одним обстоятельством, которое присутствует во всех опытах первой группы и отсутствует во всех опытах второй группы. Если такое обстоятельство действительно обнаруживается (в нашем случае им оказалось обстоятельство **A**), то оно и объявляется причиной наступления **q**.

Примером применения этого метода являются исследования причины выпадения обильной росы на некоторых предметах. Вначале экспериментально удалось отделить те предметы, на которых обильно выпадала роса, от всех остальных. А затем удалось установить, что общим обстоятельством, которое было присуще всем первым предметам и отсутствовало у всех остальных, являлась скорость охлаждения их поверхности.

Метод сопутствующих изменений. Использование методов различия и совместного сходства и различия связано с одним недостатком, который состоит в том, что зачастую мы не можем элиминировать заинтересовавшее нас обстоятельство. Допустим, что мы хотим узнать, почему в некоторых случаях различные маятники имеют один и тот же период колебаний. Мы можем предположить, что причиной этого могли бы быть следующие факторы: – химический состав вещества, из которого сделаны маятники; плотность этого вещества; его твердость; вес; сила тяжести, действующая в данной географической точке; длина маятника и т. п. Однако все эти факторы нельзя полностью элиминировать (нельзя сделать маятник из вещества, которое не обладало бы никаким химическим составом, не обладало бы плотностью, весом, не было подвержено силе тяжести, не обладало бы никакой длиной и т. д.), их можно только модифицировать, т. е. менять значения этих величин. В этом случае можно воспользоваться особым методом установления причинных зависимостей – *методом сопутствующих изменений*. Логическая схема рассуждения по этому методу выглядит так:

$$
\begin{array}{lll l}
1. & \mathbf{A', B_1, \ldots, B_m} & \mathbf{-\,q'} & \text{– наблюдаемый факт} \\
2. & \mathbf{A'', B_1, \ldots, B_m} & \mathbf{-\,q''} & \text{– наблюдаемый факт} \\
. & & . & \text{– наблюдаемый факт} \\
. & & . & \text{– наблюдаемый факт} \\
. & & . & \text{– наблюдаемый факт} \\
n. & \mathbf{A^{''\ldots'}, B_1, \ldots, B_m} & \mathbf{-\,q^{''\ldots'}} & \text{– наблюдаемый факт} \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c l}
\text{Во всех данных случаях } (\mathbf{A'} \equiv \mathbf{q'}) & \text{– описание фактов} \\
\hline
\text{Всякий раз } (\mathbf{A'} \equiv \mathbf{q'}) & \text{– индуктивное обобщение} \\
\hline
\mathbf{A} \Supset \mathbf{q} & \text{– } \mathbf{Df_4} \text{ причины.}
\end{array}
$$

Заключение, что **А** причина **q**, делается здесь на основе наблюдения одновременной модификации как обстоятельства **А**, так и следствия **q** по их *интенсивности* (*степени*), что как раз и показывается знаком «штрих». Например, выкачивая из-под колокола, в котором находится звонок, воздух и оставляя все остальные параметры неизменными, можно наблюдать постепенное ослабление звука по мере выкачивания воздуха; увеличивая сопротивление в электрической цепи, можно одновременно наблюдать ослабление силы тока; перемещая барометр на разные высоты, можно наблюдать изменение высоты ртутного столба; модифицируя длину маятника, можно установить, что именно этот фактор является причиной изменения периода его колебания, и т. д.

Получившееся заключение о причине наступления события **q** можно попытаться обосновать чисто теоретическим способом. Для пояснения того, что здесь имеется в виду, обратимся к последнему нашему примеру с маятником. Основываясь на классической механике Ньютона, можно чисто теоретически рассмотреть колебания гармонического маятника и установить, что период его колебания **T** определяется величиной:

$$\mathbf{T} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

откуда вытекает, что при равенстве длин двух маятников их периоды колебаний должны также совпадать.

Важность рассматриваемого метода определяется несколькими обстоятельствами.

1. Большое число физических, химических, биологических и социальных характеристик предметов допускают модификацию, т. е. являются *интенсивными величинами*, – величинами, которые обладают различной степенью своего проявления. Действительно, такие, скажем, характеристики, как скорость, давление, температура, вязкость, вес, электропроводность и т. д., – это все величины, имеющие различные степени, а следовательно, их можно модифицировать по этим степеням.

2. Методом сопутствующих изменений (это касается и метода различия) можно проверить не только одно обстоятельство относительно его влияния на наступление **q**, но и проверить влияние всех остальных факторов, участвующих в эксперименте. Последнее особенно важно в случае, когда в принципе нельзя исключить из возможных причин некоторое обстоятельство, что создает сомнение относительно действия сложной причины, вызывающей **q**. Так, в опыте с периодом колебаний маятника нельзя устранить вес маятника. Однако, применяя метод сопутствующих изменений по фактору веса, т. е. оставляя все другие параметры неизменными и модифицируя лишь вес маятника, можно показать, что такая модификация не оказывает никакого влияния на период колебаний, а тем самым не входит составной частью в причину данного явления. С другой стороны, попытка проверить этим же методом, не влияет ли на величину периода колебаний другой неустранимый фактор – сила тяжести, даст положительный результат. Последнее подтверждается и чисто теоретическим рассмотрением вопроса, ибо в формулу, определяющую период колебаний, величина веса маятника не входит, а величина силы тяжести входит.

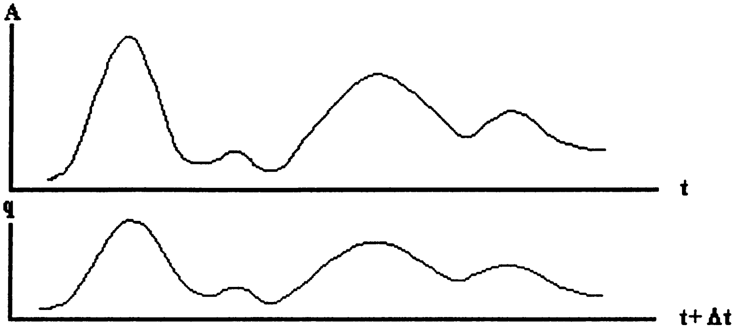
3. Все рассмотренные ранее методы позволяли лишь констатировать наличие причинной связи, т. е. позволяли сказать: «да, причинная связь имеется». Метод же сопутствующих изменений дополнительно к этому дает возможность выявить и математическую закономерность, существующую между величиной параметра **A** и величиной **q**. Откладывая, например, по оси ординат величину **A**, а по оси абсцисс величину **q**, можно построить график изменения **q** в зависимости от изменения **A** и, тем самым, найти то аналитическое выражение, которое будет соответствовать этому графику. Последнее дает возможность перейти к чисто математическому описанию причинных зависимостей, т. е. перейти к теоретическому рассмотрению вопроса.

4. Метод сопутствующих изменений позволяет определить граничные условия установленной казуальной закономерности, т. е. позволяет эмпирически определить, при каких условиях данная закономерность начинает и перестает действовать. Определение граничных условий является чрезвычайно важным моментом в познании природы.

5. Методы установления причинных зависимостей, как говорилось, не дают гарантию однозначного решения вопроса о причине **q**, так как заключения по этим методам проблематичны в общем случае. Метод сопутствующих изменений также страдает неопределенностью, но он же обладает и одним важным достоинством. Коль скоро модификация **A** причинно связана с модификацией **q**, то эта связь (какой бы сложной она ни была) может быть в пределах, не выходящих за граничные условия, либо прямо пропорциональной, либо обратно пропорциональной. В таком случае можно построить два графика: изменения величины **A** и изменения величины **q** по времени (см. Рис.1), а затем их совместить.

В результате должно получиться нечто подобное тому, что изображено на Рис.1. Вероятность чисто случайного совпадения этих двух графиков столь ничтожно мала, что вероятность наличия причинной связи между **A** и **q** становится почти достоверностью, т. е. близкой к 100%.

Аналогично можно поступить и в случае применения метода различия, если рассматривать наличие и отсутствие причины **A** и следствия **q** во времени. Результатом, если между **A** и **q** имеется причинная связь, должен явиться, например, такой совмещенный график (см. Рис. 2).



Совмещенный график изменения **A** и **q** по времени **t** при прямой пропорциональной зависимости

Рис.1

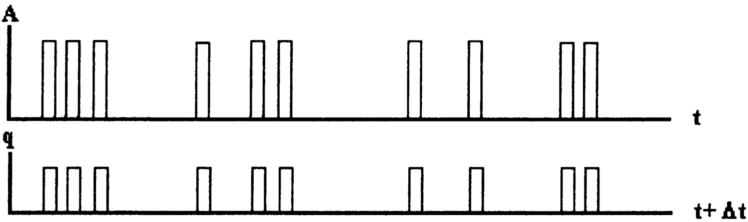


Рис.2

Совпадение этих двух графиков также не может быть случайным, а потому **A** с высокой степенью вероятности должно быть признано причиной **q**. Сама возможность рассмотрения метода различия подобным образом говорит о том, что фактически мы имеем здесь дело с частным случаем метода сопутствующих изменений, а именно с тем случаем, когда фактор **A** дихотомически (сравни проблематику деления понятий и классификации) модифицируется по его наличию или отсутствию.

Статистические методы установления причинных связей. До сих пор причинные зависимости рассматривались как *динамические*. Однако они могут носить и не столь жесткий характер. Например, некоторое событие **q** может осуществляться при наступлении **A** лишь в определенном числе случаев, т. е. связь между **q** и **A** сбывается лишь вероятностным образом.

Допустим, что при наличии **A** с необходимостью осуществляется в точности одно из событий $\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_r$. Это означает, что **A** жестко (*динамически*) детерминирует наступление сложного события $\mathbf{q}_1 \vee\ldots\vee \mathbf{q}_r$, но лишь случайным образом (*статистически*) детерминирует наступление именно события $\mathbf{q}_i$. Логическая схема такого рассуждения должна имеет вид:

$$\begin{array}{lll}
1. & \mathbf{A} - \mathbf{q}_{i1} & \text{– наблюдаемый факт} \\
2. & \mathbf{A} - \mathbf{q}_{i2} & \text{– наблюдаемый факт} \\
. & & \text{– наблюдаемый факт} \\
. & & \text{– наблюдаемый факт} \\
. & & \text{– наблюдаемый факт} \\
n. & \underline{\mathbf{A} - \mathbf{q}_{in}} & \text{– наблюдаемый факт} \\
 & \mathbf{A} \Supset \delta(\mathbf{q}_i) = \mathrm{k}_i\,, &
\end{array}$$

где $1 \le \mathbf{i}_1,\ldots, \mathbf{i}_n \le \mathrm{r}$, а $\delta(\mathbf{q}_i)$ – относительная частота наступления явления $\mathbf{q}_i$ под действием предшествующего обстоятельства **A**.

Например, бросание монеты жестко детерминирует выпадение или «орла» ($\mathbf{q}_1$), или «решетки» ($\mathbf{q}_2$), но бросание монеты лишь случайным образом детерминирует выпадение при данном бросании именно «решетки». Прохождение фотона сквозь две узкие щели жестко детерминирует его попадание в некоторую точку экрана, но это же самое событие лишь случайным образом детерминирует, в какую именно точку экрана он попадет. Вероятностный характер этого процесса выражается в том, что при прохождении большого количества фотонов через узкие щели на экране появится интерференционная картинка в виде светлых и темных колец. В квантовой механике имеется специальная ψ-функция, позволяющая теоретически вычислить вероятность, с которой произвольный фотон в данном опыте отклонится на определенный угол от прямолинейного движения.

Однако в приведенной выше схеме рассуждения есть один весьма сомнительный момент, не позволяющий рассматривать ее в качестве метода установления причинных зависимостей. Действительно, данная схема нарушает кардинальным образом один из основополагающих принципов элиминации предшествующих обстоятельств – принцип (3). Согласно этому принципу, отсутствие модификации у обстоятельства **A** при наличии модификации у следствия **q** должно означать, что **A** не является причиной **q**. Иначе получится, что нечто неизменное (обстоятельство **A**) является причиной изменяющегося (**q**). Кроме того, в схеме среди обстоятельств, претендующих на роль причины наступления каждого $\mathbf{q}_i$, указано лишь обстоятельство **A**. Тем самым предполагается, что мы каким-то образом уже заранее установили, помимо данного рассуждения, причину явления $\mathbf{q}_i$. На самом же деле в реальном эмпирическом исследовании имеется большое число других обстоятельств, которые тоже могут каким-то образом влиять на наступление $\mathbf{q}_i$.

Выход из данной ситуации состоит в следующем. Во-первых, можно полагать, что другие факторы **B** и **C**, содержащиеся в опыте, действительно неизменны в каждом из экспериментов. В то же время само обстоятельство **A** является сложным событием. Например, подбрасывание монеты связано со следующими характеристиками: высотой, с которой ведется подбрасывание, силой броска, скоростью закручивания монеты и т. д. Таким образом, фактор **A** состоит из факторов **D**, **K**, **S**, которые меняют свое значение в экспериментах. Далее можно предположить, что возможные значения интенсивностей последних величин распадаются ровно на два класса: на значения **D'**, **K'**, **S'**, при которых выпадает «орел» – $\mathbf{q}_1$, и на значения **D''**, **K''**, **S''**, при которых выпадает «решетка» – $\mathbf{q}_2$. Обозначим первый класс как бросок с интенсивностью **A'**, а второй – как бросок с интенсивностью **A''**. Тогда рассуждение о каузальной связи примет вид метода сопутствующих изменений:

1.	**A', B, C**	$-\mathbf{q}_1$	– наблюдаемый факт
.		$-\mathbf{q}_1$	– наблюдаемый факт
.		$-\mathbf{q}_1$	– наблюдаемый факт
.		$-\mathbf{q}_1$	– наблюдаемый факт
m.	**A', B, C**	$-\mathbf{q}_1$	– наблюдаемый факт
m+1.	**A'', B, C**	$-\mathbf{q}_2$	– наблюдаемый факт
.		$-\mathbf{q}_2$	– наблюдаемый факт
.		$-\mathbf{q}_2$	– наблюдаемый факт
.		$-\mathbf{q}_2$	– наблюдаемый факт
n.	**A'', B, C**	$-\mathbf{q}_2$	– наблюдаемый факт

$$\mathbf{A}^* \Supset \delta(\mathbf{q}_i) = \mathrm{k}_i,$$

где $i = 1$ или 2.

В этом случае причиной выпадения «орла» и «решетки» действительно является бросание монеты, но сам этот фактор оказывается интенсивной величиной.

Во-вторых, можно полагать, что **A** является неизменным в каждом из экспериментов, а другие сопутствующие обстоятельства изменяются. Тогда схема установления причинной зависимости будет строиться по методу, напоминающему метод сходства, но со сложной причиной:

$$
\begin{array}{lll}
1.\ \mathbf{A, B_{i1}, C_{j1}} & -\ \mathbf{q_{i1}} & \text{– наблюдаемый факт} \\
2.\ \mathbf{A, B_{i2}, C_{j2}} & -\ \mathbf{q_{i2}} & \text{– наблюдаемый факт} \\
. & & \text{– наблюдаемый факт} \\
. & & \text{– наблюдаемый факт} \\
. & & \text{– наблюдаемый факт} \\
n.\ \underline{\mathbf{A, B_{in}, C_{jn}}} & \underline{-\ \mathbf{q_{in}}} & \text{– наблюдаемый факт} \\
\end{array}
$$

$$\mathbf{A} \ \& \ (\mathbf{B_{ir}} \vee \mathbf{C_{jv}}) \Supset \delta(\mathbf{q_i}) = k_i,$$

где выражение $\mathbf{A} \ \& \ (\mathbf{B_{ir}} \vee \mathbf{C_{jv}})$ означает, что в качестве возможной причины рассматривается совместное действие неизменного фактора **A** с каким-либо из изменяющихся факторов **B** или **C**. Так как влияние факторов **B** и **C** остается неизвестным, они выступают в качестве скрытых параметров.

Независимо от того, какое из предложенных уточнений принимается, согласование исходной схемы с понятием причинности требует признания наличия некоторых скрытых параметров, которые меняются от эксперимента к эксперименту. Именно наличием скрытых параметров многие физики пытаются объяснить интерференционную картинку, возникающую на экране после прохождения потока фотонов сквозь щели.

Тем не менее ряд физиков явно или неявно склонны признать действие в рамках квантовой механики исходной формы статистического рассуждения. При этом часто прямо говорится об отказе от *принципа детерминизма* и признании *концепции индетерминизма*, т. е. признании возможности нарушения принципа причинности. Различие же в поведении электрона после прохождения им щелей объясняется тем, что здесь мы имеем дело с подлинно случайным событием, т. е. таким спектром различий в поведении объекта, которые являются беспричинными. Однако концепция индетерминизма является весьма подозрительной с философской и логической точки зрения. Поэтому многие физики при интерпретации квантовой механики тем или иным способом вводят скрытые параметры. В качестве таковых указывают на различные обстоятельства. Это может быть концепция размытости квантово-механического объекта, т. е. концепция его нахождения сразу в нескольких пространственных состояниях: в опыте всегда происходит взаимодействие с объектом, находящимся в определенном состоянии, но нам остается неизвестным, с каким именно; это может быть трудно учитываемое влияние прибора на результаты эксперимента, или влияние субъекта познания, или даже влияние всей Вселенной на результаты опыта.

Методы корреляции. Более оправданным является другое понимание статистической причинной зависимости. Выше говорилось, что действующая причина **A** не всегда может породить следствие **q**. Часто другие внутренние или внешние факторы накладываются на каузальное взаимодействие и препятствуют действию причины. Если же эти препятствующие факторы исчезают, **A** проявляет свое действие, порождая **q**. В этом случае мы, зная заранее обстоятельство **A** и следствие **q**, пытаемся установить, существует ли между ними каузальная связь или нет. Установление наличия причинной зависимости осуществляется по следующей схеме метода различия и называется *методом корреляции* связи между **A** и **q**:

1.	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, [\mathbf{\Phi}']$	$-\ \mathbf{q}$	– наблюдаемый факт
2.	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, [\mathbf{\Phi}'']$	$-\ \neg\mathbf{q}$	– наблюдаемый факт
3.	$\neg\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \lceil\mathbf{\Phi}' \vee \mathbf{\Phi}''\rceil$	$-\ \neg\mathbf{q}$	– наблюдаемый факт
.		.	– наблюдаемый факт
.		.	– наблюдаемый факт
.		.	– наблюдаемый факт
n.	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, [\mathbf{\Phi}']$	$-\ \mathbf{q}$	– наблюдаемый факт
n+1.	Отсутствует опыт типа: $\neg\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} - \mathbf{q}$		

$$\delta(\mathbf{q}/\mathbf{A}) > k \supset \mathbf{A} \Supset \mathbf{q},$$

где $\delta(\mathbf{q}/\mathbf{A})$ – относительная частота наступления **q** при условии наступления события **A** (при подсчете этой частоты следует учитывать только результаты экспериментов, выражаемых посылками вида 1 и 2); **B**, **C** – это известные нам неизменные факторы, а [**Φ**'] и [**Φ**"] –

это некоторый неизвестный нам фактор, модификация которого и влияет на появление или отсутствие каузальной связи.

Применение данного рассуждения основано на следующих соображениях. Если между **A** и **q** имеется каузальная связь, то ее можно было бы попытаться установить методом различия. Об этом как раз и говорят посылки 1 и 3, в которых фиксируются результаты экспериментов, получаемые в обычных условиях по этому методу. Однако посылка 2 показывает, что стандартные условия метода различия нарушены влиянием какого-то фактора. Тогда для подсчета степени связи между **A** и **q** надо учесть количество экспериментов вида 1 по отношению к общему числу экспериментов вида 1 и 2.

Чрезвычайно существенной в этой ситуации является $n + 1$-я посылка, которая гласит, что нам ни разу не встретился случай, когда при отсутствии **A** наступило событие **q**. Действительно, если ко всем опытным данным присоединяются еще и случаи вида $\neg$**A** – **q**, то это прямо означало бы, что фактор **A** и событие **q** независимы друг от друга. Но тогда не было бы оснований полагать, что осу ществление **q** обусловлено наличием **A**. Именно эта посылка и говорит, что между **A** и **q** существует каузальная связь в смысле определения $\mathbf{Df_2}$, т. е. **A** является необходимым условием для наступления **q** – без **A** событие **q** не наступает.

Отметим, что для получения достоверного заключения с использованием данного рассуждения чрезвычайно важно накопление статистического материала. При этом, чем слабее связь между **A** и **q**, тем большее количество экспериментов надо проводить. Целью же накопления статистического материала является как раз обоснование $n + 1$-й посылки.

Тем не менее рассмотренный только что метод часто используют для экспериментального оправдания такого псевдоявления, как телепатия – «передача» мыслей на расстояние. В опытах по телепатии всегда присутствуют дополнительные эксперименты вида $n + 1$-й посылки, а это означает, что акт «передачи мысли» (событие **A**) и так называемый «прием мысли» (событие **q**) независимы друг от друга. Кроме того, для получения действительно хорошо обоснованного заключения требуется постоянство результатов во всех сериях опытов, что применительно к экспериментам по телепатии не выполняется, так как в значительном их числе результат бывает отрицательным.

Интерес представляет и другой достаточно часто использующийся в науке прием установления *корреляции* между некоторым обстоятельством **A** и следствием **q**. Обстоятельство **A** в этом случае не является причиной **q**, но наличие **A** так или иначе (позитивно или негативно) модифицирует **q**. Например, внесение в почву удобрений не является причиной роста растения, но его подкормка удобрениями может увеличить урожайность. Применение в автомобилях ремней безопасности не устраняет причин аварий, но оно может уменьшить число аварий с тяжелыми последствиями. Итак, фактор **A**, не будучи причиной **q**, может тем не менее модифицировать его величину и тем самым является причиной этой модификации.

Чтобы установить такого рода корреляцию, поступают следующим образом: проводят по крайней мере два эксперимента. В одном из них фактор **A** отсутствует (этот эксперимент называется контрольным), в других же фактор **A** присутствует. Рассуждение в этом случае выглядит следующим образом:

1.	$\neg\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$	$-\,\mathbf{q}'$	– наблюдаемый факт
.	.	$-\,\mathbf{q}'$	– наблюдаемый факт
.	.	$-\,\mathbf{q}'$	– наблюдаемый факт
.	.	$-\,\mathbf{q}'$	– наблюдаемый факт
m.	$\neg\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$	$-\,\mathbf{q}'$	– наблюдаемый факт
m+1.	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$	$-\,\mathbf{q}''$	– наблюдаемый факт
.	.	$-\,\mathbf{q}''$	– наблюдаемый факт
.	.	$-\,\mathbf{q}''$	– наблюдаемый факт
.	.	$-\,\mathbf{q}''$	– наблюдаемый факт
n.	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$	$-\,\mathbf{q}''$	– наблюдаемый факт

$$\mathbf{A} \Supset (|\mathbf{q}'' - \mathbf{q}'|) \neq 0\,,$$

где выражение, стоящее в заключении, означает, что **A** является причиной изменения абсолютной величины **q**. Если **q**' и **q**'' выражаемы числами, то величину корреляции между **A** и **q** можно вычислить.

§5. Гипотетико-дедуктивный метод

При рассмотрении причинных зависимостей неоднократно указывалось на важную роль, которую играют в поиске этих зависимостей определенные соображения (предположения) о возможной причине события. Такого рода предположения позволяют более целесообразно организовать исследовательскую работу, существенно сузить область поиска возможной причины, а если предположение оказалось верным, то и быстро достигнуть положительного результата.

Вообще, имея дело с фактами окружающей действительности, человек всегда стремится понять и объяснить, почему мир устроен именно таким, а не иным образом. С этой целью он выдвигает различного рода предположения о том, как устроен отдельно взятый предмет и мир в целом, допускает существование различных сил, действующих в мире, наличие закономерных связей между явлениями, высказывает соображения о механизмах взаимодействия между предметами. Все эти предположения, допущения и соображения носят первоначально проблематический (вероятностный) характер и могут, в конце концов, оказаться как *обоснованными* (*верифицированными*), так и *опровергнутыми* (*фальсифицированными*).

Проблематическое предположение, высказанное для объяснения совокупности фактов, называются *гипотезой*.

Однако не всякое предположение может быть названо научной гипотезой. К числу последних относятся лишь такие предположения, которые удовлетворяют ряду условий.

Во-первых, предположение не должно вступать в противоречие с твердо установленными и неоднократно проверенными научными фактами, эмпирическими сведениями о мире. Наличие подобного несоответствия прямо и заранее указывало бы на ложность выдвинутой гипотезы.

Во-вторых, научная гипотеза должна основываться на допущении действия лишь естественных, существующих в самой природе сил и сущностей, т. е. не выходить за рамки естественных причин. Несоблюдение этого условия, допущение в качестве объясняющей причины наличия некоторых сверхъестественных факторов, скажем божественной воли или демонических сил, лишает гипотезу статуса научного предположения. Последнее объясняется следующими обстоятельствами:

(1) предположение о действии воли бога или дьявола является слишком сильным допущением, так как с помощью этих факторов можно объяснить все, что угодно;

(2) это предположение нельзя экспериментально ни обосновать, ни опровергнуть;

(3) из сказанного вытекает, что, вводя такого рода допущения, мы сделали бы бессмысленным само научное исследование, и оно, еще не начавшись, должно уже было бы считаться завершенным.

В-третьих, при формулировке научных гипотез надо стараться не вводить без весьма веских оснований таких допущений, которые вступали бы в противоречие с твердо установленными теоретическими положениями. Так, если для объяснения некоторых фактов вводится гипотеза, согласно которой допускается существование вечного двигателя, то такая гипотеза (если в ее пользу не приведено очень мощное фактуальное обоснование) должна расцениваться как антинаучная, ибо она вступает в противоречие с законами термодинамики, которые прямо запрещают существование вечных двигателей.

Характерным примером в этом отношении является история с открытием нейтрино – одной из элементарных частиц. При исследовании β-распада ядер атомов выяснилось, что подсчет баланса энергии, количества движения и момента количества движения начального ядра и продуктов распада не сходится. Это привело некоторых ученых к идее о нарушении при β-распаде одного из наиболее фундаментальных законов физики – законов сохранения, что лежало за гранью рациональной научной гипотезы. Выход из положения был найден В. Паули, который предположил, что в β-распаде принимает участие еще одна, не наблюдаемая в опыте, частица с нулевой массой покоя, которая как раз и уносит с собой часть энергии. Эта частица получила название «нейтрино», а ее существование было обосновано экспериментально в 1953 году.

Кроме этих самых общих условий, каждая хорошо организованная научная гипотеза должна обладать еще некоторыми особенностями. Прежде всего это касается степени ее развитости. Первоначально гипотеза рождается как простая догадка. Далее эта догадка уточняется, детализируется, наполняется более богатым содержанием. В частности, если гипотеза допускает математическое описание, то желательно довести ее до такой степени, чтобы она не только объясняла явления, но и предсказывала их количественные характеристики.

Кроме этого, всякая хорошо организованная гипотеза должна допускать свою *принципиальную проверку на истинность*. Иначе говоря, всегда должна существовать принципиальная возможность с помощью различного рода экспериментов или наблюдений либо подтвердить ее, а может быть и доказать (установить истинность, верифицировать), либо опровергнуть (фальсифицировать).

Наконец, добротное научное предположение не должно «обрастать» *гипотезами ad hoc* (*гипотезами для данного случая*). Их появление связано с тем, что порой основное предположение не в полной мере объясняет ту совокупность фактов, ради которых оно и было выдвинуто, а лишь часть их. В таком случае для объяснения этого «остатка» приходится вводить дополнительные гипотезы, которые и носят название гипотез *ad hoc*. Например, Птолемей для объяснения видимого движения планет предположил, что движение каждой планеты осуществляется одновременно по двум концентрическим окружностям. В центре одной из этих окружностей, называемой деферентом, помещалась неподвижная Земля. Предполагалось, что небесное тело движется с постоянной скоростью по еще одной окружности, называемой эпициклом, центр которой перемещался по деференту. В результате сложения этих двух движений Птолемею удалось достаточно точно, в математически строгом виде, описать видимые перемещения планет по небесному своду. Это позволило предвычислять положение планет на небосводе, составлять календари, рассчитывать движения судов. Однако по мере накопления расхождений между реальным положением планет и их вычисленными положениями общую схему Птолемея пришлось усложнить, вводя новые эпициклы второго, третьего и т. д. порядка. Введение эпициклов n-ого порядка, центры которых перемещались по эпициклам n - 1-ого порядка, было, конечно же, искусственным построением и представляло собой гипотезу *ad hoc*.

Широкое использование гипотез свойственно всем наукам – как дедуктивным, так и эмпирическим. Но в эмпирических науках это использование оформляется в особый познавательный прием, называемый *гипотетико-дедуктивным методом*. Метод представляет из себя сложный процесс формирования и проверки гипотез, распадающийся на несколько этапов.

(1) На основе эмпирических наблюдений выделяется некоторый процесс или событие и относительно этого процесса или события устанавливается наличие некоторых наблюдаемых фактов $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2,..., \mathbf{p}_n$.

(2) Пользуясь предшествующим опытом и имеющимся уже заранее знанием $\mathbf{Г}$, а также установленными фактами $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2,..., \mathbf{p}_n$, для

объяснения этих фактов выдвигают гипотезу **h**. Переход от **Г** и $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$,..., $\mathbf{p_n}$ к гипотезе **h** представляет собой правдоподобное следование **Г**, $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$,..., $\mathbf{p_n} \Vdash \mathbf{h}$, причем считается, что это следование имеет место, только если из **Г** и **h** можно дедуцировать каждый из наблюдаемых фактов $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$,..., $\mathbf{p_n}$, т. е. имеет место **Г**, $\mathbf{h} \vdash \mathbf{p_i}$ (здесь очевидным образом используется понятие правдоподобного следования как обратной дедукции). Если данное условие не выполнено, то гипотеза **h** является неверной уже при своей формулировке и должна быть отброшена.

(3) Из **Г** и **h** дедуктивно выводятся следствия фактуального характера $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$,..., $\mathbf{r_k}$, утверждающие наличие новых фактов, отличных от уже наблюдавшихся фактов $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$,..., $\mathbf{p_n}$, известных до формулировки гипотезы. Итак, на данном этапе осуществляется дедукция вида **Г**, $\mathbf{h} \vdash \mathbf{r_j}$.

(4) На последнем этапе каждое следствие $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$,..., $\mathbf{r_k}$ фактуального характера подвергается эмпирической проверке. Если каждое из следствий $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$,..., $\mathbf{r_k}$ согласуется с опытом, то гипотеза **h** считается *подтвержденной* (иногда даже можно заключить, что она доказана). Если же хотя бы одно из следствий $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$,..., $\mathbf{r_k}$ не согласуется с опытом, то гипотеза считается *фальсифицированной.*

Покажем действие гипотетико-дедуктивного метода на одном примере. Наблюдая за поведением пчел, ученые заметили, что насекомые на некоторых цветках полностью завершали сбор нектара ($\mathbf{p_1}$), в то время как на другие цветки они садились лишь на мгновение и тут же взлетали ($\mathbf{p_2}$). Так как никакой гипотезы по поводу этого различия в поведении пчел сделано не было, то наблюдения были продолжены над отдельно взятыми пчелами. В результате выяснилось, что пчела полностью завершала сбор, если она посещала цветок впервые ($\mathbf{p_3}$). Если же подлетала к цветку, который недавно посетила, то ее поведение менялось и она, присев на него, мгновенно улетала ($\mathbf{p_4}$). Тем самым уже на уровне простого наблюдения фактов была установлена причинная зависимость поведения пчел ($\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$) от числа посещений цветка ($\mathbf{p_3}$, $\mathbf{p_4}$). Для объяснения этой причинной зависимости и была выдвинута гипотеза **h**. Используя знание о том, что многие животные помечают посещаемые ими места различного рода пахучими веществами (**Г**), ученые предположили, что пчелы при первой посадке на цветок тоже помечают его специальным пахучим химическим веществом – феромоном. Эта гипотеза позволила объяснить, в чем заключалась причина различия в поведении насекомых, так как из **Г** и **h** можно было сделать два вывода: $\mathbf{\Gamma}, \mathbf{h} \vdash \mathbf{p}_3 \supset \mathbf{p}_1$ и $\mathbf{\Gamma}, \mathbf{h} \vdash \mathbf{p}_4 \supset \mathbf{p}_2$. Кроме того, гипотеза **h** позволила представить поведение пчел как целесообразное с биологической точки зрения. Действительно, феромон служил знаком, что посещаемый ею цветок является уже истощенным объектом. Тем самым энергозатраты пчелы снижались, и повышалась эффективность ее работы.

Но гипотезу еще надо было подтвердить. Ее можно было бы прямо доказать, если бы исследователям удалось выделить сам этот феромон и проделать с ним соответствующие опыты. Однако они применили иной прием обоснования гипотезы, а именно – проверили те следствия, которые вытекали из данной гипотезы. Так как вещество было пахучим, то естественно было считать, что снижение пахучести феромона должно было как-то повлиять на поведение пчел (**r**). С этой целью над пчелами были проведены опыты по наблюдению их поведения в условиях действия вытяжного вентилятора. Оказалось, что в обычных условиях пчела на сбор нектара с цветка тратила вполне определенное время. В случае же, когда был включен вентилятор и феромонный сигнал значительно ослабевал, пчела затрачивала на сбор нектара большее количество времени. Этот опыт согласуется с выдвинутой гипотезой и тем самым ее подтверждает, хотя и не обосновывает полностью.

Описанная выше общая теоретическая схема гипотетико-дедуктивного метода представляет собой лишь идеализированную модель того, как она используется в реальных условиях. Покажем идеальный характер общей схемы на примере опровержения гипотезы.

На первый взгляд представляется, что опровержение гипотезы есть простое воспроизведение схемы *modus tollens* дедуктивной логики:

$$\frac{\begin{array}{c}\mathbf{h} \vdash \mathbf{r} \\ \neg\mathbf{r}\end{array}}{\neg\mathbf{h}.}$$

Но в этой логике *modus tollens* применяется как теоретический метод познания. В случае же эмпирического познания многие моменты не являются жестко определенными, а потому ход опровержения будет отличаться от простого применения *modus tollens*.

В самом деле, допустим, что имеется дедуктивное выведение вида: **Г**, **h** ⊢ **r**. Наличие такого вывода при хорошо развитой дедуктивной теории можно установить надежно, а потому не будем сомневаться в выводе вида **Г**, **h** ⊢ **r**. Допустим далее, что опыт показывает на наличие ¬**r**. Тем самым возникло противоречие между предсказанием **r** и показанием опыта – ¬**r**. Означает ли это, что надо сразу же отбросить гипотезу **h** как неверную? Попав в такую ситуацию, исследователь может далее поступить по-разному.

Во-первых, он может предположить, что данные опыта неверны, и на самом деле имеет место как раз **r**, а не ¬**r**, т. е. он может подвергнуть сомнению результаты эмпирической проверки утверждения **r**. Таким образом, что должно быть отвергнуто – гипотеза **h** или свидетельство ¬**r**, – еще только следует установить дальнейшими проверками.

Допустим далее, что, проведя несколько независимых друг от друга проверок, удалось окончательно доказать наличие ¬**r**. Означает ли это, что гипотеза **h** теперь должна быть отброшена как неверная? Оказывается, даже в этом случае такой вывод был бы слишком поспешным. Ведь **r** выводилось не просто из гипотезы **h**, а из **h**, взятого совместно с совокупностью сведений **Г**. Поэтому можно допустить, что противоречие между **r** и ¬**r** есть результат не учета какого-то обстоятельства **А**, которое должно входить в **Г**, а на самом деле в нем отсутствует. Следовательно, можно, не отбрасывая гипотезу **h**, видоизменить **Г** на **Г'**, где **Г'** – это новая совокупность сведений, в которой уже учитывается обстоятельство **А**.

Из данного рассмотрения видно, что гипотезу не так уж и легко бывает опровергнуть. Для этого необходимо убедиться, что эмпирический результат ¬**r** твердо установлен и не вызывает сомнений и, кроме того, что не удается устранить различие между теоретически полученным **r** и эмпирическим ¬**r** допущением каких-то факторов, не учитываемых в **Г**, несмотря на все попытки это сделать. Только при учете всех этих обстоятельств можно заключить о неверности именно гипотезы **h**. Рассмотрим на примерах все эти случаи.

При создании своей знаменитой таблицы химических элементов Д. И. Менделеев оставил некоторые клетки незаполненными, так как в то время соответствующие химические элементы не были известны. Одно из таких мест отводилось химическому элементу, который он назвал экаалюминием. Используя гипотезу, которая легла в основу построенной им таблицы, он теоретически вычислил атомный вес экаалюминия и предсказал его свойства. Через некоторое время французский исследователь П. Лекок экспериментально выделил новый химический элемент, названный им галлием, который совпадал по химическим свойствам с гипотетическим экаалюминием, но опытная проверка его атомного веса показала расхождение с теоретически предсказанным Д. И. Менделеевым. На этом основании П. Лекок заявил о неверности гипотезы Менделеева. Однако Менделеев не согласился с этим выводом и настоял на перепроверке результатов опыта. При более тщательной проверке результаты экспериментов совпали с предсказанными Менделеевым, а источником первоначального расхождения оказалось наличие в образцах галлия, по которым эмпирически устанавливался атомный вес, примесей других химических элементов.

Рассмотрим другой пример. В результате теоретических расчетов, выполненных на основе небесной механики Ньютона (**h**), было выявлено расхождение между теоретически вычисленным движением планеты Уран (**r**) и наблюдаемым ее движением на небесной сфере ($\neg$**r**). При этом были учтены возмущающие действия других небесных тел на движение Урана (**Г**). Таким образом, возникла ситуация, логическая суть которой представима в форме:

$$\mathbf{\Gamma}, \mathbf{h} \vdash \mathbf{r}, \text{ но фактически имеет место } \neg\mathbf{r}.$$

Однако уверенность ученых в правильности механики Ньютона (**h**) и правильности результатов наблюдений ($\neg$**r**) была столь высока, что причину расхождения заподозрили в совокупности сведений **Г**. Было высказано предположение, что эта совокупность неполна, так как не учитывает существования еще одной, неизвестной планеты, орбита которой более удалена от Солнца, чем орбита Урана, и возмущающее действие которой как раз и является причиной указанного расхождения.

Итак, для объяснения несоответствия между **r** и $\neg$**r** была выдвинута новая гипотеза о существовании некоторой еще не открытой планеты, что изменило совокупность сведений **Г** на **Г***. Французский исследователь Леверье и англичанин Адамс, исходя из величин расхождения данных, вычислили орбиту предполагаемой планеты и указали место ее нахождения на небосводе. В результате проведения астрономических наблюдений планета действительно была открыта в указанном месте и получила название Нептун.

В связи с данным примером заметим, что по мере того как с помощью гипотезы **h** удается получить объяснение все новых и новых фактов, доверие к ней возрастает и она переходит в разряд *теории*, т. е. становится широко признанным рабочим инструментом исследователя. Гипотетический характер теории не изменяется, но ученый, при возникновении расхождения между теоретически вычисленной величиной **r** и эмпирически наблюдаемой, склонен в этом случае объяснять данное несоответствие не неверностью теории, а действием некоторых неучтенных факторов. Для опровержения теории он всегда потребует очень веских оснований. Чаще всего это происходит в том случае, когда на смену одной теории приходит новая теория, которая лучше, чем первая, объясняет совокупность имеющихся фактов.

Именно с этим обстоятельством связан следующий пример. Астрономам было известно, что перигелий планет, движущихся вокруг Солнца по эллиптическим орбитам, т. е. ближайшая к Солнцу точка их орбиты, со временем перемещается в направлении движения планеты. Для всех планет такое вековое смещение их перигелия удалось объяснить возмущающим действием других небесных тел. Но у Меркурия величина смещения оказалась достаточно значительной, причем эту величину не удавалось полностью объяснить действием других небесных тел. История науки показала, что в данном случае это расхождение между теорией и эмпирией опровергало как раз теорию (**h**) – небесную механику Ньютона. При замене **h** на $\mathbf{h}^1$ – общую теорию относительности Эйнштейна – расхождение между теоретической величиной и эмпирической удалось устранить.

Рассмотрим теперь, каким образом происходит процесс *подтверждения* гипотез. При этом заметим, что бывают случаи, когда гипотеза при ее эмпирической проверке не просто подтверждается, т. е. увеличивается степень доверия к ней, но она и *доказывается* (*верифицируется*). Именно так произошло с гипотезой о возмущающем действии неизвестной планеты на движение Урана после того, как эта планета (Нептун) была эмпирически обнаружена, а расчеты показали, что учет гравитационного действия новой планеты достаточен, чтобы согласовать теоретические расчеты с данными наблюдений. Но такая ситуация возможна далеко не всегда, а только когда гипотеза носит *частный* и *эмпирический* характер. В других же случаях, когда в качестве гипотезы выступает *общее* утверждение или утверждение *теоретического* характера, согласованность гипотезы с фактами является все же не окончательным ее доказательством, а лишь увеличивает степень ее правдоподобия, т. е. подтверждает ее.

Так, специальная теория относительности основана на принятии гипотезы о постоянстве скорости света в вакууме в любой системе отсчета. Она подтверждается различного рода экспериментами и, в частности, наблюдением за движением двойных звездных систем. Действительно, если бы скорость света, приходящего к нам от каждой из звезд двойной системы, была различной, то мы должны были бы наблюдать нарушение законов гравитационного взаимодействия при их взаимном движении. Однако такого рода нарушений не наблюдается.

Гипотеза о постоянстве скорости света является эмпирической гипотезой, но она носит общий характер, а потому никакие ее эмпирические проверки никогда не могут ликвидировать сомнения: всегда ли верна данная гипотеза. Этому сомнению учит нас история с небесной механикой Птолемея и механикой Ньютона, которые господствовали в науке в течение долгого времени, были неоднократно подтверждены различного рода наблюдениями и, тем не менее, оказались ложными. Причина такого положения заключается в том, что каждый раз, проверяя на практике (эмпирически) теоретические утверждения, исследователь действует в исторически ограниченных условиях, а потому имеет дело с некоторой ограниченной практикой. Так, механика Ньютона проверялась на объектах, которые двигались с весьма умеренными скоростями, где расхождения между эмпирическими данными и предсказанием теории столь незначительны, что их нельзя зафиксировать ни одним прибором. Движение же объектов со скоростями, близкими к скорости света, например элементарных частиц в синхрофазотронах, сразу же показывает, что механика Ньютона неверна. Указанную ограниченность нашей сегодняшней практики приходится всегда учитывать и при рассмотрении современных теорий.

Обнаружение новых, ранее не известных фактов, которые совместимы с гипотезой, ведет к повышению ее достоверности. Вероятность истинности особенно повышается в том случае, когда факты, подтверждающие гипотезу, являются разнородными. Так, немецкий ученый Вегенер для объяснения совпадения в очертаниях современных материков выдвинул гипотезу об их перемещении, согласно которой в прошлом существовал единый субматерик, в результате тектонических процессов он раскололся, а отдельные его части, разойдясь в разные стороны, образовали нынешнее расположение современных материков. Проведенные исследования по теоретической реконструкции субматерика позволили выявить его конфигурацию в отдаленном прошлом. Это позволило установить, что геологическое строение тех регионов нынешних материков, которые некогда соприкасались, является идентичным. Эти факты существенно повысили степень доверия к гипотезе Вегенера. В свою очередь, палеонтологические исследования показали наличие сходства в этих регионах ископаемых остатков флоры и фауны. Но окончательно гипотеза стала рассматриваться как хорошо обоснованная теория после того, как были открыты срединно-океанические хребты с рифтовыми зонами, в которых происходит постоянное изливание магматического вещества, ведущее к раздвижению материков. В настоящее время уточненная версия этой гипотезы известна как теория литосферных плит.

Очень веским доводом в пользу гипотезы является эмпирическое обнаружение такого эффекта, существование которого ранее не было известно и было предсказано лишь исходя из положений гипотезы. Таким доводом в пользу гравитационной гипотезы Эйнштейна (общая теория относительности) стало обнаружение английским астрономом А. Эддингтоном в 1919 году искривления лучей света при прохождении вблизи массивных тел (Солнце) – эффект, который до гипотезы Эйнштейна предсказан быть не мог.

Часто для объяснения одной и той же совокупности фактов $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2,\dots, \mathbf{p}_n$ выдвигается две или большее количество различных гипотез $\mathbf{h}_1,\dots, \mathbf{h}_m$. В этом случае возникает ситуация *конкурирующих гипотез*. При их проверке может оказаться, что все гипотезы, кроме одной, скажем $\mathbf{h}_i$, будут опровергнуты. В таком случае считается, что вероятность истинности $\mathbf{h}_i$ возрастает. Рассуждение в данном случае строится многократным использованием модуса *tollendo ponens*:

$$\frac{\begin{array}{c}\mathbf{h_1 \lor h_2 \lor \ldots \lor h_m}\\ \mathbf{\neg h_2, \ldots, \neg h_m}\end{array}}{\mathbf{h_1}.}$$

В науке известно много конкурирующих гипотез. Это гипотеза Гюйгенса-Френеля, объяснявшая световые явления волновыми процессами, и гипотеза Ньютона, рассматривавшая эти же явления с корпускулярной точки зрения; гипотезы органической и неорганической природы происхождения нефти, гипотезы Менделя-Дарвина, Ламарка и Берга, объясняющие явления наследственности с различных позиций, и т. д. Проходя проверку эмпирическим испытанием, одна гипотеза не обязательно должна победить другую. Достаточно часто возникает ситуация, когда обе конкурирующие гипотезы в своих исходных формулировках оказываются опровергнутыми, а вместо них принимается другая гипотеза, которая в тех или иных формах совмещает в себе обе гипотезы. Так, например, произошло с корпускулярной и волновой гипотезами света. В современной квантовой механике показано, что свет одновременно обладает как корпускулярными, так и волновыми свойствами, хотя и теория Гюйгенса-Френеля, и теория Ньютона не могут быть приняты.

§6. Аналогия

К правдоподобным относится еще один тип рассуждений, называемых *рассуждениями по аналогии*. Под аналогией обычно понимают сходство, подобие предметов, т. е. наличие у них некоторых одинаковых характеристик. Рассуждением по аналогии (или просто аналогией) в логике называют вывод, основанный на данном сходстве.

Рассуждение по аналогии **состоит в том, что на основе сходства двух предметов (систем предметов) α и β по каким-то характеристикам, а также на основе того, что α присущ некоторый признак, заключают о присущности его и β.**

Существует большое разнообразие рассуждений по аналогии. Мы рассмотрим только наиболее простые случаи.

Одной из разновидностей таких рассуждений является *аналогия по свойствам*. О последней говорят в том случае, когда **a** и **b** представляют собой индивиды, а в качестве характеристики, переносимой с одного предмета на другой, выступает некоторое свойство. Данное рассуждение имеет следующую структуру:

$$
\begin{array}{lll}
1. & \mathbf{P_1(a) \,\&\, P_1(b)} & \text{– пос.} \\
2. & \mathbf{P_2(a) \,\&\, P_2(b)} & \text{– пос.} \\
\cdot & & \text{– пос.} \\
\cdot & & \text{– пос.} \\
\cdot & & \text{– пос.} \\
n. & \underline{\mathbf{P_n(a) \,\&\, P_n(b)}} & \text{– пос.} \\
 & \quad \mathbf{a \approx b} & \\
n+1. & \underline{\mathbf{Q(a)}} & \text{– пос.} \\
 & \mathbf{Q(b)}, &
\end{array}
$$

где «≈» – знак подобия (сходства), а «**a** ≈ **b**» означает, что «предмет **a** подобен предмету **b**».

Суть этого рассуждения состоит в следующем. Допустим, что исследователь желает установить наличие некоторого свойства **Q** у предмета **b** и при этом по каким-либо обстоятельствам лишен возможности сделать это посредством эмпирической проверки. В этой ситуации он может опереться на подобие предмета **b** и предмета **a**. Первые *n* посылок как раз и устанавливают наличие такого подобия между **a** и **b** на основании их сходства в признаках $\mathbf{P_1}, \mathbf{P_2}, \ldots, \mathbf{P_n}$, о чем и делается первое заключение – **a** ≈ **b**. Далее, опираясь на это заключение о подобии предмета **a** предмету **b** и на *n* + 1-ю посылку, которая говорит, что у предмета **a** наличествует свойство **Q**, исследователь может распространить это подобие и на указанное свойство **Q**, перенося последнее с предмета **a** на предмет **b**.

Заключение, получаемое по данному рассуждению, носит проблематичный характер и является лишь вероятностным, более или менее правдоподобным. С теоретической точки зрения это легко объяснить, ведь если **a** и **b** – разные предметы, то они должны чем-то различаться. Поэтому, будучи сходны между собой по признакам $\mathbf{P_1}, \mathbf{P_2}, \ldots, \mathbf{P_n}$, они как раз и могут различаться по наличию у одного и отсутствию у другого признака **Q**. Это непосредственно вытекает из принципа *тождества неразличимых* Г. Лейбница, согласно которому два предмета тождественны (т. е. являются одним и тем же предметом) тогда и только тогда, когда все свойства, которыми они обладают, одинаковы:

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \equiv_{\mathrm{Df}} \forall P(P(\mathbf{a}) \equiv P(\mathbf{b})).$$

Отсюда следует, что если предметы не тождественны, а только подобны, то у них имеется по крайней мере одно различающее их свойство.

Чтобы гарантировать более высокую степень вероятности заключения, полученного по аналогии, необходимо учитывать какие-то дополнительные содержательные условия. По наличию или отсутствию этих дополнительных условий различают *популярную* и *научную аналогию.*

Популярная аналогия строится без какого-либо систематического анализа и отбора тех свойств, по которым устанавливается наличие подобия между двумя предметами, и не учитывает, связаны ли каким-либо образом эти свойства $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2,..., \mathbf{P}_n$ с переносимым признаком $\mathbf{Q}$ или нет. В популярной аналогии несколько первых случайно встретившихся сходств между $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ служат уже основанием переноса интересующего нас признака без установления взаимосвязи между $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2,..., \mathbf{P}_n$ и $\mathbf{Q}$. Иначе говоря, в ней рассуждение строится «как попало».

Примером такого рода рассуждения может служить попытка, скажем, следующим образом аргументировать, что на Марсе имеется жизнь – $\mathbf{Q}(\mathbf{b})$. С этой целью сравниваются свойства, присущие Марсу и Земле, и устанавливается, что и Марс, и Земля являются планетами ($\mathbf{P}_1$), что они вращаются вокруг Солнца ($\mathbf{P}_2$), светят отраженным светом ($\mathbf{P}_3$), вращаются вокруг своей оси ($\mathbf{P}_4$), и Марс, и Земля имеют спутники ($\mathbf{P}_5$), что они гравитационно взаимодействуют друг с другом ($\mathbf{P}_6$). Таким образом, сходство (подобие) этих предметов по $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2,..., \mathbf{P}_6$ очевидно. Отсюда, действуя по популярной аналогии, можно получить вывод, что они сходны и в наличии на этих планетах жизни ($\mathbf{Q}$). Недостаток этого рассуждения состоит в том, что подобие двух планет – Земли и Марса – установлено с помощью признаков, которые или вообще не имеют, или имеют весьма отдаленное отношение к переносимому признаку $\mathbf{Q}$.

Важнейшее же условие построения *научной аналогии* состоит как раз в том, чтобы два предмета $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ уподобились по свойствам, которые являются существенными для переносимого признака **Q**. Это означает, что свойства $\mathbf{P_1}, \mathbf{P_2}, \ldots, \mathbf{P_n}$ должны быть не любыми, а лишь такими, которые, будучи непосредственно связаны с переносимым признаком **Q**, с высокой долей вероятности гарантировали бы перенесение признака **Q** на предмет **b**. К числу таких свойств, если иметь в виду жизнь в тех биологических формах, как она существует на Земле, должны быть отнесены: сходство или различие в температурном режиме обеих планет, наличие атмосферы, возможность существования тех или иных веществ (воды, например, в жидком состоянии, а также кислорода) и вообще любые другие свойства, создающие возможность образования на Марсе аминокислот и нуклеиновых кислот.

Таким образом, в научной *аналогии по свойствам* фактическая вероятность истинности высказывания $\forall x((\mathbf{P_1}(x) \mathbin{\&} \mathbf{P_2}(x) \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \mathbf{P_n}(x)) \supset \mathbf{Q}(x))$ должна быть близкой или равной 1. В случае, когда это высказывание истинно, аналогия по свойствам называется *строгой*. В рассуждениях строгой аналогии одновременная фактическая истинность посылок гарантирует получение истинного заключения.

Другой формой аналогии является *аналогия по отношениям*. Эта форма рассуждения применяется в том случае, когда **a** и **b** – системы объектов, например *n*-ки объектов: $\mathbf{a} = \langle \mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_m} \rangle$ и $\mathbf{b} = \langle \mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \ldots, \mathbf{b_m} \rangle$. Рассуждение в этом случае строится следующим образом:

$$
\begin{array}{lll}
1. & \mathbf{P_1}(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_m}) \mathbin{\&} \mathbf{P_1}(\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \ldots, \mathbf{b_m}) & \text{– пос.} \\
2. & \mathbf{P_2}(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_m}) \mathbin{\&} \mathbf{P_2}(\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \ldots, \mathbf{b_m}) & \text{– пос.} \\
. & & \text{– пос.} \\
. & & \text{– пос.} \\
. & & \text{– пос.} \\
n. & \underline{\mathbf{P_n}(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_m}) \mathbin{\&} \mathbf{P_n}(\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \ldots, \mathbf{b_m})} & \text{– пос.} \\
 & \qquad\qquad \mathbf{a} \approx \mathbf{b} & \\
n{+}1. & \underline{\mathbf{Q}(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_m})} \quad \text{– пос.} & \\
 & \mathbf{Q}(\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \ldots, \mathbf{b_m}). &
\end{array}
$$

Например, после открытия Галилеем спутников у Юпитера для этой системы объектов стало возможным установить целый ряд отношений $\mathbf{P_1}, \mathbf{P_2}, \ldots, \mathbf{P_n}$ и, в частности, тот факт (**Q**), что каждый спутник вращался вокруг наиболее массивного небесного тела, входящего в данную систему, – планеты Юпитер. Это явилось веским доводом в пользу гелиоцентрического устройства нашей планетной системы, позволив сделать по данному методу вывод, что и сами планеты вместе со своими спутниками вращаются вокруг наиболее массивного небесного тела – Солнца. Подобным же образом Резерфорд на основании проведенных им экспериментов установил целый ряд сходных отношений, существующих между электронами и атомным ядром, с одной стороны, и планетами и Солнцем – с другой. Исходя из этого, он сделал на основании аналогии по отношениям вывод о планетарном строении атомов, выдвинув гипотезу, что электроны вращаются вокруг ядра по орбитам наподобие того, как планеты вращаются вокруг Солнца.

Аналогия по отношениям также бывает двух видов – популярной и научной. В популярной аналогии не учитывается взаимосвязь между отношениями $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2,..., \mathbf{P}_n$ и переносимым признаком $\mathbf{Q}$. В научной аналогии по отношениям фактическая вероятность истинности высказывания $\forall x_1...\forall x_m((\mathbf{P}_1(x_1,..., x_m)\ \&\ \mathbf{P}_2(x_1,..., x_m)\ \&...\&\ \mathbf{P}_n(x_1,..., x_m)) \supset \mathbf{Q}(x_1,..., x_m))$ должна быть близкой или равной 1. В случае, когда это высказывание истинно, аналогия по отношениям называется *строгой*.

Аналогия свойств и аналогия по отношениям широко используется в процессах *моделирования*. Прежде чем приступить к строительству дорогостоящего сооружения (самолета, гидроэлектростанции, корабля и т. д.), создают модель этого объекта и затем устанавливают различные свойства и отношения, присущие модели, которые далее по аналогии переносятся на оригинал. Чтобы правомерно осуществить такое перенесение, необходимо предварительно быть уверенным, что модель и оригинал подобны друг другу. Для решения этого вопроса существует специальная *теория подобия*, которая устанавливает условия подобия двух объектов. Выполнение этих условий позволяет с высокой степенью вероятности переносить результаты эмпирических исследований, полученные на модели, на оригинал.

Выше были выделены наиболее употребимые способы рассуждений по аналогии, хотя имеются и другие типы аналогии. Одной из них является, например, *аналогия на основе сходства функций*. Рассуждение в этом случае ведется следующим образом.

$$\frac{\begin{array}{ll} 1.\ \mathbf{Q(a_1, a_2,..., a_m)} & \text{– пос.} \\ 2.\ \mathbf{f(a_1, a_2,..., a_m) = f(b_1, b_2,..., b_m)} & \text{– пос.} \end{array}}{\mathbf{Q(b_1, b_2,..., b_m)}.}$$

Примером такой аналогии является умозаключение:

1-я посылка. Животные дышат в воздушной среде легкими.

2-я посылка. Функция, которую выполняют у животных в воздушной среде легкие, совпадает с функцией, которую выполняют у рыб в водной среде жабры (и те и другие служат для получения кислорода).

Отсюда заключаем:

Рыбы дышат в водной среде жабрами.

В настоящее время большую роль в научных изысканиях играет аналогия между работой головного мозга и компьютера. Эта аналогия, с одной стороны, позволяет из знания, как работает компьютер, лучше понять, каким образом осуществляется переработка информации живыми биологическими системами, в частности человеком, а с другой – исследования в области нейрофизиологии и информатики позволяют переносить на искусственные системы все более и более тонкие детали работы головного мозга, приближаясь тем самым к созданию искусственного интеллекта.

Наконец, можно сказать, что все наше познание окружающего мира есть не что иное, как воспроизведение этого мира в аналоговых конструкциях. Действительно, наши теории, посредством которых описывается мир, представляют собой теоретические модели этого мира. С этой точки зрения, теоретическое описание различных процессов, происходящих в мире, если наши теории являются хорошими подобиями этого мира, позволяет переносить на саму действительность то, что мы установили чисто теоретически.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

В предметном указателе содержатся ссылки на страницы, где вводится соответствующий термин – посредством определения или другим способом.

П

Э

Я